

Análisis de Una Variable Real
Curso 2008/09
Programa, bibliografía y criterios de evaluación

Título de la asignatura: Análisis de Una Variable Real

Titulación: Licenciatura en Matemáticas

Curso: Primero

Carácter: Troncal

Temporalidad: Anual

Créditos: 15 créditos

Número de horas: 5 horas semanales

Área: Análisis Matemático

Departamento responsable: Matemáticas

Profesor: Carlos Benítez Rodríguez

Programa

EL NÚMERO REAL

1. Recapitulación sobre el concepto de número: números naturales (\mathbb{N}), enteros (\mathbb{Z}) y racionales (\mathbb{Q}).
2. Sucesiones convergentes y de Cauchy de números racionales. Construcción de los números reales (\mathbb{R}). Operaciones y orden en \mathbb{R} .
3. Representación decimal de los números. Numerabilidad de \mathbb{Q} y no numerabilidad de \mathbb{R} .
4. Supremo e ínfimo de un conjunto acotado de números reales. Teorema fundamental del orden en \mathbb{R} . Existencia y unicidad de la raíz n^{a} positiva de un número positivo.
5. El cuerpo \mathbb{C} de los números complejos. Imposibilidad de ordenación.
6. Módulo y argumento de un número complejo. Potencias enteras y raíces de un número complejo: fórmula de Moivre.
7. La topología de \mathbb{R} . Intervalos y entornos. Puntos interiores, adherentes, frontera, aislados y de acumulación de un conjunto. Conjuntos abiertos y cerrados. Teorema de Bolzano.
8. Conjuntos compactos. Teoremas de Bolzano-Weierstrass y de Heine-Borel-Lebesgue.
9. Sucesiones de números reales. Operaciones con sucesiones. Sucesiones convergentes y de Cauchy. Álgebra de límites. Sucesiones monótonas.

10. Valores de adherencia de una sucesión. Límite inferior y superior. Completitud de \mathbb{R} . Límites infinitos. La recta real ampliada.
11. Potencias de exponente real y logaritmos.
12. Series de números reales. Sumabilidad y sumabilidad absoluta. Series geométricas y armónicas. Series de términos positivos. Series alternadas.
13. Reordenación de series: teorema de Riemann. Introducción y supresión de paréntesis.
14. Criterios de sumabilidad para series de términos positivos y criterios de sumabilidad absoluta. Criterios de comparación y de comparación por paso al límite. Criterios del cociente, de la raíz y de Raabe.
15. Criterios de sumabilidad para series de términos cualesquiera. Criterios de Dirichlet y de Abel.

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

16. Operaciones y orden en el conjunto de las funciones. Límite de una función en un punto. Álgebra de límites. Límite secuencial.
17. Límites laterales. Límites inferior y superior. Límites infinitos y límites en el infinito.
18. Funciones continuas y uniformemente continuas. Álgebra de funciones continuas y uniformemente continuas. Continuidad secuencial. Continuidad lateral. Tipos de discontinuidades.
19. Imagen recíproca de entornos y de conjuntos abiertos por funciones continuas. Imagen de un intervalo por una función continua: propiedad de valor medio.
20. Imagen de un compacto por una función continua. Continuidad uniforme de una función continua en un compacto.
21. Funciones convexas. Diversas caracterizaciones. Estudio de su continuidad.
22. Funciones monótonas. Estudio de su continuidad.
23. Funciones de variación acotada. Las funciones de variación acotada son diferencia de monótonas.

CÁLCULO DIFERENCIAL

24. Contacto de dos funciones en un punto. Concepto de función derivable en un punto. Derivabilidad y continuidad. Derivadas laterales.
25. Álgebra de derivadas. Regla de la cadena. Derivada de la función inversa. Funciones diferenciables continuamente.
26. Estudio de la derivabilidad de funciones elementales (potenciales, exponenciales, logarítmicas, circulares y sus inversas). Estudio de la derivabilidad de las funciones convexas.
27. Crecimiento y decrecimiento en un punto. Extremos relativos de funciones derivables. Teoremas de Rolle y del valor medio.

28. Algunas consecuencias de los teoremas del valor medio. Crecimiento y decrecimiento en un intervalo. Regla de l'Hôpital. Propiedad de valor medio de las funciones que son derivada de otra en un intervalo.
29. Derivadas de orden superior. Contacto de orden m con una función polinómica de grado m de las funciones m veces derivables en un punto: teorema local de Taylor.
30. Algunas consecuencias del teorema local de Taylor. Posiciones relativas de la gráfica de una función varias veces derivable en un punto respecto a su recta tangente en el mismo: puntos de convexidad y concavidad, máximos, mínimos y puntos de inflexión.
31. Teorema global de Taylor. Concavidad y convexidad en un intervalo. Cálculo aproximado de valores de funciones varias veces derivables en un intervalo.

CÁLCULO INTEGRAL

32. Integración de funciones escalonadas. Sumas de Riemann de funciones acotadas en un intervalo compacto. Concepto de integral de Riemann. Integrabilidad de las funciones continuas y de las funciones monótonas.
33. Operaciones y orden en el conjunto de las funciones integrables, el espacio $\mathcal{R}[a, b]$ de las funciones R-integrables en $[a, b]$. Linealidad y monotonía de la integral. Aditividad respecto al intervalo de integración.
34. Si $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, entonces, $\inf(f, g), \sup(f, g), f^+, f^-, |f| \in \mathcal{R}[a, b]$, y se verifica que $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$. Otras desigualdades.
35. Teoremas de valor medio. La función $F : x \in [a, b] \rightarrow F(x) = \int_a^x f$, cuando $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Regla de Barrow.
36. Conjuntos de contenido cero y de medida cero. Condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad en el sentido de Riemann. Teorema de Lebesgue.
37. Integración en conjuntos que no son intervalos. Integración de funciones no acotadas.
38. Concepto de integral de Riemann-Stieltjes.
39. Cálculo de primitivas. Primitivas inmediatas. Cálculo de primitivas por partes y por cambio de variable.
40. Primitivas de funciones racionales.
41. Primitivas de funciones racionales en $\operatorname{sen}x$ y $\operatorname{cos}x$, y de funciones racionales en x y $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.
42. Cálculo de áreas planas y de volúmenes y áreas laterales de cuerpos de revolución.

SUCESIONES Y SERIES FUNCIONALES

43. Convergencia (sumabilidad) puntual y uniforme de una sucesión (serie) de funciones. Criterio mayorante de Weierstrass para la sumabilidad uniforme de una serie funcional. Convergencia (sumabilidad) uniforme y continuidad.

44. Convergencia (sumabilidad) uniforme y diferenciabilidad.
45. Convergencia (sumabilidad) uniforme e integración. Convergencia monótona y dominada de sucesiones de funciones integrables. Incomplitud del espacio $\mathcal{R}[a, b]$.
46. Series de potencias. Radio de convergencia. Convergencia uniforme en los compactos del intervalo de convergencia.
47. Serie de Taylor de una función indefinidamente derivable en un punto. Concepto de función analítica: algunos ejemplos y propiedades.

Son muchos los libros en los que pueden verse (en órdenes distintos, de diferentes formas, ...) los temas tratados en esta asignatura, pero no se seguirá ninguno concreto. A modo de ejemplo, todo puede encontrarse en:

Bibliografía

- [1] T.M. APOSTOL, Análisis Matemático, Ed. Reverté, Barcelona, 1960.
- [2] J.A. FERNÁNDEZ VIÑA, Lecciones de Análisis Matemático I, Ed. Tecnos, Madrid, 1981.
- [3] W. RUDIN, Principios de Análisis Matemático, Ed. McGraw Hill, México, 1980.

Criterios de evaluación

Se efectuarán dos exámenes parciales a lo largo del curso, uno en los alrededores de la Navidad y otro en los alrededores de la Semana Santa (en fechas acordadas con los alumnos). Además, un examen final en el mes de junio en el que, junto a la materia correspondiente al último trimestre, cada alumno deberá repetir los parciales no aprobados en su día. Los exámenes serán escritos, de una duración aproximada de tres horas y constarán de varias preguntas. La calificación de cada examen será la media de la obtenida en las distintas preguntas, y la calificación final la media de la obtenida en los tres parciales.