JULIO 2014

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro preguntas de la opción elegida puntuará como máximo **2'5 puntos**. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1.- Considere las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) (1 punto) Calcule la matriz $A = 3B^2 - C$.
(b) (1'5 puntos) Halle la inversa A^{-1} de la matriz A.

2.- **(a)** (1'5 puntos) Calcule el valor del parámetro k para que la recta $r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$ sea paralela al plano Π de ecuación $kx + y + kz = 1$.

(b) (1 punto) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, calcule la distancia de la recta r al plano Π.

3.- **(a)** (1'75 puntos) Estudie el dominio de definición, las asíntotas, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}.$$

(b) (0'75 puntos) Represente la función $f(x)$ anterior utilizando los datos obtenidos en el apartado **(a)**.

4.- Calcule la siguiente integral definida de una función racional:

$$\int_2^{\mathrm{e}+1} \frac{x-2}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x.$$

JULIO 2014

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro preguntas de la opción elegida puntuará como máximo **2'5 puntos**. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN B

1.- Considere el sistema compatible determinado de dos ecuaciones con dos incógnitas $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=3 \end{array}\right\} \equiv \mathcal{S}$, cuya solución es el punto $P_0=(2,-1)$ de $\mathbb{R}^2$. Sea $\mathcal{S}'$ el sistema que se obtiene al añadir a $\mathcal{S}$ un tercera ecuación $ax+by=c$. Conteste razonadamente las siguientes preguntas:

(a) (0'75 punto) ¿Puede ser $\mathcal{S}'$ compatible determinado?

(b) (0'75 punto) ¿Puede ser $\mathcal{S}'$ incompatible?

(c) (1 punto) ¿Puede ser $\mathcal{S}'$ compatible indeterminado?

2.- En $\mathbb{R}^3$, considere los cuatro puntos $A=(0,1,1)$, $B=(-2,0,-1)$, $C=(-1,1,0)$ y $D=(-2,2,1)$, y sea r la recta que pasa por C y por D.

(a) (1 punto) Obtenga ecuaciones paramétricas de r.

(b) (1'5 puntos) Halle los puntos P de la recta r para los que el triángulo APB sea rectángulo en su vértice P.

3.- **(a)** (1 punto) Enuncie el *teorema del valor medio de Lagrange*.

(b) (1'5 punto) Aplicando el anterior teorema a la función $f(x)=\operatorname{sen} x$, pruebe que cualesquiera que sean los números reales $a<b$ se cumple la desigualdad $\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a \leq b-a$.

4.- **(a)** (1 punto) Dibuje el recinto plano limitado por la parábola $y=x^2-2$ y la recta $y=x$.

(b) (1'5 punto) Calcule el área de dicho recinto plano.

Criterios Específicos de Corrección

OPCIÓN A

1.- (a) : 1 punto por operar correctamente para obtener A. **(b)** (1'5 puntos) : 0'25 puntos por el determinante $|A|$, 0'75 punto por la matriz adjunta A^*, y 0'5 puntos por aplicar bien la fórmula y obtener A^{-1} a partir de $|A|$ y A^*. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.- (a) (1'5 puntos) : 0'75 puntos por un planteamiento correcto y 0'75 puntos por el cálculo ($k = 1$). **(b)** (1 punto) : 0'5 puntos por un planteamiento correcto y 0'5 puntos por la resolución (la distancia es $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$ unidades).

3.- (a) (1'75 puntos) : el dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$ (0'25 puntos) y $x = 0$ es asíntota vertical (0'25 puntos); como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 1$ y $\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x)-x\big) = 3$ $\big($o como el cociente de la division $(x+1)^3/x^2$ es $x+3\big)$, la recta $y = x+3$ es asíntota oblicua por ambos lados (0'5 puntos); los ceros de la primera derivada son $x = -1$ y $x = 2$ (0'25 puntos); en $x = 2$ hay mínimo porque $f''(2) > 0$ (0'25 puntos); en $x = -1$ hay inflexión porque $f''(-1) = 0$ y $f'''(-1) \neq 0$ (0'25 puntos). **(b)** : 0'75 puntos.

4.- (2'5 puntos) : 0'5 puntos por la igualdad $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$; 0'75 puntos por simplificar $\frac{x-2}{x^2-3x+2}$ como una fracción simple $\left(\frac{x-2}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-1}\right)$; 0'75 puntos por el cálculo de la integral indefinida $\left(\int \frac{x-2}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1| + C\right)$; 0'5 puntos por obtener que la integral definida es $\ln \mathrm{e} - \ln 1 = 1$.

OPCIÓN B

1.- (a) (0'75 puntos) : Sí, cuando P_0 pertenezca a la recta $r : ax + by = c$. **(b)** (0'75 puntos) : Sí, cuando P_0 no pertenezca a r. **(c)** (1 punto) : No, ya que si $\mathcal{S}'$ es compatible sus soluciones lo son también de $\mathcal{S}$, y $\mathcal{S}$ tiene una única solución.

2.- (a) (1 punto) : Unas ecuaciones paramétricas para r son $x = -1 - \lambda$, $y = 1 + \lambda$, $z = \lambda$. **(b)** (1'5 puntos) : 1 punto por un planteamiento correcto (debe ser $P = (-1-\lambda, 1+\lambda, \lambda)$ de modo que $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$), y 0'5 puntos por obtener las soluciones: $P_1 = (0, 0, -1)$ y $P_2 = (-5/3, 5/3, 2/3)$.

3.- (a): 1 punto. **(b)** (1'5 puntos) : si $f(x) = \operatorname{sen} x$, dados $a < b$ existe $c \in (a, b)$ tal que $\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a = f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) = \cos c\,(b-a) \leq b - a$.

4.- (a) (1 punto) : 0'25 puntos por la representación de la curva, 0'25 por la representación de la recta y 0'5 puntos por la determinación del recinto pedido. **(b)** (1'5 puntos) : 1 punto por el planteamiento de la integral definida para calcular el área $\big(A = \int_{-1}^{2} (x - x^2 + 2)\,\mathrm{d}x\big)$, y 0'5 puntos por el cálculo del área ($A = 9/2$ unidades).