Junio 2014

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro preguntas de la opción elegida puntuará como máximo **2'5 puntos**. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1.- **(a)** (1'5 puntos) Estudie cómo es el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{lllcr} x & +\,y & -\,4z & = & 2 \\ 2x & -\,y & -\,z & = & 1 \\ x & -\,2y & +\,3z & = & -1 \end{array}\right\} .$$

(b) (1 punto) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones.

2.- Considere en $\mathbb{R}^3$ las rectas $r : \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$, $s : \left\{ \begin{array}{c} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{array} \right.$.

(a) (0'5 puntos) Obtenga un vector director de la recta s.

(b) (1 punto) Obtenga el plano Π que contiene a r y es paralelo a s.

(c) (1 punto) Obtenga el plano $\overline{\Pi}$ que contiene a r y es perpendicular a s.

3.- **(a)** (0'5 puntos) Enuncie la condición que se debe cumplir para que una recta $x = a$ sea asíntota vertical de una función $f(x)$.

(b) (2 puntos) Calcule las asíntotas verticales y horizontales (en $-\infty$ y en $+\infty$) de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x - 2} .$$

4.- Calcule el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x) = \cos x$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2\pi$.

JUNIO 2014

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro preguntas de la opción elegida puntuará como máximo **2'5 puntos**. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN B

1.- **(a)** (0'5 puntos) Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) (1'5 puntos) Calcule la matriz inversa de A.

(c) (0'5 puntos) Calcule el determinante de la matriz $B = \frac{1}{2}A^3$ sin obtener previamente B.

2.- **(a)** (2 puntos) Dado el plano Π_1 de ecuación $z = 0$, escriba las ecuaciones de dos planos Π_2 y Π_3 tales que los planos Π_1, Π_2 y Π_3 se corten dos a dos pero no exista ningún punto común a los tres.

(b) (0'5 puntos) Clasifique el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos Π_1, Π_2 y Π_3.

3.- **(a)** (1 punto) Enuncie el *teorema de Bolzano.*

(b) (0'75 puntos) Aplique el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $\cos x = x^2 - 1$ tiene soluciones positivas.

(c) (0'75 puntos) ¿Tiene la ecuación $\cos x = x^2 - 1$ alguna solución negativa? Razone la respuesta.

4.- Calcule la siguiente suma de integrales definidas

$$\int_1^2 \frac{-2}{x^3}\, \mathrm{d}x \; + \int_\pi^{2\pi} \left(-\operatorname{sen} x \cdot \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} + \cos^2 x \cdot \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\right) \mathrm{d}x\,,$$

cuyas integrales indefinidas asociadas son inmediatas.

Criterios Específicos de Corrección

OPCIÓN A

1.- **(a)** (1'5 puntos): 0'5 puntos por el cálculo del rango de cada una de las matrices del sistema, $\operatorname{rg} A = 2 = \operatorname{rg} A^*$, y 0'5 puntos por obtener que el sistema es compatible indeterminado. **(b)** (1 punto): cualquier método es válido $\big($tomando z como parámetro, las soluciones son $x = 1+\frac{5}{3}z$, $y = 1+\frac{7}{3}z\big)$.

2.- **(a)** (0'5 puntos): un vector director de s es $\vec{u} = (0,0,1)$. **(b)** (1 punto): 0'5 puntos por cualquier planteamiento correcto, y 0'5 puntos por obtener que la ecuación de Π es $x = 0$. **(c)** (1 punto): 0'5 puntos por cualquier planteamiento correcto, y 0'5 puntos por obtener que la ecuación de $\overline{\Pi}$ es $z = 0$.

3.- **(a)**: 0'5 puntos. **(b)** (2 puntos): 1 punto por el cálculo de las asíntotas verticales ($x = -1,\ x = 2$), y 1 punto por el cálculo de las asíntotas horizontales ($y = 1$ en $-\infty,\ y = 1$ en $+\infty$).

4.- (2'5 puntos): 1'5 puntos por plantear bien las integrales para obtener que el área es $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$; 1 punto por resolverlas bien y obtener $A = 4$.

OPCIÓN B

1.- **(a)**: 0'5 puntos $\big(|A| = 2\big)$. **(b)** (1'5 puntos): 1 punto por la matriz adjunta A^*, y 0'5 puntos por aplicar bien la fórmula y obtener A^{-1} a partir de $|A|$ y A^*. **(c)**: 0'5 puntos $\big(|B| = (\frac{1}{2})^3|A|^3 = 1\big)$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

2.- **(a)** (2 puntos): 1 punto por un planteamiento correcto y 1 punto por la resolución. **(b)**: 0.5 puntos.

3.- **(a)**: 1 punto. **(b)**: 0'75 puntos. **(c)**: 0'75 puntos.

4.- (2'5 puntos): 0'75 puntos por hacer bien la 1ª integral indefinida, 1 punto por hacer bien la 2ª integral indefinida, 0'75 puntos por sustituir bien los límites de integración y concluir que la suma de integrales definidas vale 5/4.