Junio 2013

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro preguntas de la opción elegida puntuará como máximo **2'5 puntos**. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1.- (a) (1'25 puntos) Encuentre, razonadamente, un valor del parámetro a para el que sea compatible determinado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & 2y & + & z & = & a+1 \\ (a+1)x & - & y & - & az & = & -1 \\ -x & + & y & + & z & = & 2a \end{array}\right\}.$$

(b) (1'25 puntos) Resuelva el sistema para el valor de a encontrado.

2.- Sean en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{e} = (2,0,0)$, $\vec{u} = (1,0,-1)$ y $\vec{v} = (-2,3,-2)$.
(a) (1 punto) Calcule el producto vectorial $\vec{e} \times \vec{u}$.
(b) (0'75 puntos) Calcule el seno del ángulo θ que forman $\vec{e}$ y $\vec{u}$.
(c) (0'75 puntos) Calcule el ángulo ϕ que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

3.- Estudie si la recta r de ecuación $y = 4x - 2$ es tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ en alguno de sus puntos.

4.- (a) (1 punto) Halle, utilizando la fórmula de integración por partes, una primitiva de la función $f(x) = 1 + \ln x$.
(b) (1'5 puntos) Calcule el área de la región plana limitada por la curva $y = \ln x$, la recta horizontal $y = -1$, y las rectas verticales $x = 1$ y $x = \mathrm{e}$.

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro preguntas de la opción elegida puntuará como máximo **2'5 puntos**. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN B

1.- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pruebe que la matriz inversa de A es $A^{-1} = -A^2 + A + 2\,I$.

2.- **(a)** (1'5 puntos) Calcule las ecuaciones implícitas de la recta r que pasa por el punto $P = (1, -1, 0)$ y es paralela a los planos $\Pi_1 \equiv x + y = 2$ y $\Pi_2 \equiv x - y + z = 1$.

(b) (1 punto) Calcule también las ecuaciones paramétricas de r y un vector director de r.

3.- **(a)** (1 punto) Enuncie el *teorema de Bolzano.*

(b) (0'75 punto) Demuestre que alguna de las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 8x - 1$ es negativa.

(c) (0'75 puntos) Demuestre que $P(x)$ tiene también alguna raíz positiva.

4.- Calcule la siguiente integral de una función racional:

$$\int \frac{3x}{x^2 + x - 2}\,\mathrm{d}x.$$

Criterios Específicos de Corrección

OPCIÓN A

1.- **(a)** (1'25 puntos) : 0'75 punto por el cálculo del determinante de la matriz de coeficientes del sistema A $\big($en función del parámetro, $|A| = a^2 - 2$, o para un valor tomado$\big)$; 0'5 puntos por decir que el sistema es compatible determinado para un valor de a que no anula a $|A|$. **(b)**: 1'25 puntos $\big($cualquier método vale, Cramer, sustitución, ...; e.g., para $a = 0$ es fácil ver que la solución es $(x, y, z) = (0, 1, -1)\big)$.

2.- **(a)**: 1 punto $\big(\vec{e} \times \vec{u} = (0, 2, 0)\big)$. **(b)**: 0'75 puntos $\big($como $|\vec{e} \times \vec{u}| = |\vec{e}| = 2$ y $|\vec{u}| = \sqrt{2}$, de la conocida fórmula obtenemos $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{2}/2\big)$. **(c)**: 0'75 puntos $\big($los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales porque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, por lo tanto $\phi = \pi/2\big)$.

3.- (2'5 puntos) : 1'5 puntos por un planteamiento correcto (encontrar los valores de x para los que la pendiente de f es 4: $x = 1$ y $x = -\frac{5}{3}$); 1 punto por obtener que $P = (1, 2)$ es el único punto de la gráfica de f en el que su recta tangente es r.

4.- **(a)**: 1 punto $\big($se obtiene fácilmente que la primitiva es $x \ln x\big)$. **(b)** (1'5 puntos) : 1 punto por el planteamiento de la integral definida para calcular el área $\big(A = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x + 1)\, \mathrm{d}x\big)$, y 0'5 puntos por el cálculo del área $\big(A = \mathrm{e}\big)$.

OPCIÓN B

1.- (2'5 puntos) : 1 punto por el cálculo correcto de $-A^2 + A + 2I$; 1'5 puntos por el cálculo de A^{-1} $\big($0'75 por la adjunta de A, 0'5 por el determinante de A, y 0'25 por la expresión final de $A^{-1}\big)$: $\quad -A^2 + A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$

2.- **(a)** (1'5 puntos) : 1 punto por un planteamiento correcto (r es paralela a la intersección de los planos, o la dirección de r es ortogonal a los vectores directores de los planos, o r es la intersección de los planos paralelos a los dados que pasan por P); 0'5 puntos por unas ecuaciones implícitas de r $(x + y = 0,\ x - y + z = 2)$. **(b)** (1 punto) : 0'5 puntos por un vector director de r $\big(\vec{u} = (-1, 1, 2)\big)$ y $0'5$ por unas ecuaciones paramétricas de r $\big(x = \lambda,\ y = -\lambda,\ z = 2 - 2\lambda\big)$.

3.- **(a)**: 1 punto. **(b)**: 0'75 puntos. **(c)**: 0'75 puntos.

4.- (2'5 puntos) : 0'5 puntos por la descomposición $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$; 1 punto por la descomposición de $\frac{3x}{x^2+x-2}$ como suma de fracciones simples $\Big(\frac{3x}{x^2+x-2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2}\Big)$; 1 punto por el cálculo de la integral $\Big(\int \frac{3x}{x^2+x-2}\, \mathrm{d}x = \ln|x - 1| + \ln|x + 2| + C\Big)$.