Septiembre 2013

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro preguntas de la opción elegida puntuará como máximo **2'5 puntos**. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & x & y \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & x & y \end{pmatrix}$, estudie si existen números reales x e y tales que la matriz B es la inversa de la matriz A.

2.- En $\mathbb{R}^3$, calcule la distancia del punto $P = (1, -1, 2)$ a la recta r que pasa por los puntos $A = (0, -1, 1)$ y $B = (1, 0, 1)$.

3.- **(a)** (1 punto) Defina a trozos la función $f(x) = 2 - x \cdot |x|$ y represéntela gráficamente.

(b) (1 punto) Estudie la derivabilidad de $f(x)$ en toda la recta real.

(c) (0'5 puntos) Calcule la función derivada $f'(x)$ para los valores de x que exista.

4.- Calcule el valor de la integral definida

$$\int_0^1 \left(\frac{2x}{x^2+1} + (2x-1)\mathrm{e}^{x^2-x} + 2\pi \operatorname{sen}(2\pi x) \right) \mathrm{d}x \, .$$

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro preguntas de la opción elegida puntuará como máximo **2'5 puntos**. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN B

1.- **(a)** (1'25 puntos) Estudie para cuáles valores del parámetro m es compatible determinado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} (1-2m)x & - & y & - & z & = & -1 \\ (m-1)x & + & y & - & z & = & 2 \\ m^2x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right\} .$$

(b) (1'25 puntos) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones para $m = 0$.

2.- Fijados los puntos $A = (1, 1, 0)$ y $B = (1, 0, 1)$, calcule todos los puntos de la forma $X = (0, \lambda, \mu)$ para los que el triángulo ABX es equilátero.

3.- **(a)** (1'75 puntos) Estudie el dominio de definición, las asíntotas, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} .$$

(b) (0'75 puntos) Represente la función $f(x)$ anterior utilizando los datos obtenidos en el apartado **(a)**.

4.- **(a)** (1 punto) Dibuje el recinto plano limitado por la parábola $y = 1 - x^2$, el eje OX, la recta $x = 0$ y la recta $x = 2$.

(b) (1'5 punto) Calcule el área de dicho recinto.

Criterios Específicos de Corrección

OPCIÓN A

1.- (2'5 puntos) : 0'75 puntos por expresar que $B = A^{-1}$ cuando AB ó BA es la matriz unidad; 1 punto por operar bien para llegar al sistema de ecuaciones que deben cumplir x e y para que sea $B = A^{-1}$; 0'75 puntos por resolver el sistema y obtener $x = -1$ e $y = 3$. [Si se plantea calculando A^{-1} por el método usual: 0'5 puntos por el determinante de A; 1 punto por la matriz adjunta A^*; 0'75 puntos por aplicar bien la fórmula y obtener A^{-1} a partir de $|A|$ y A^*; 0'25 puntos por concluir que $x = -1$ e $y = 3$.]

2.- (2'5 puntos) : 0'5 puntos por unas ecuaciones de r $\big($implícitas $x - y = 1$, $z = 1$; paramétricas $(\lambda, \lambda - 1, 1)\big)$; 0'75 puntos por un planteamiento correcto para la obtención del punto $Q \in r$ tal que $\mathrm{d}(P, r)$ $=\mathrm{d}(P, Q)$; 0'75 puntos por obtener $Q = (1/2, -1/2, 1)$; 0'5 puntos por calcular $\mathrm{d}(P, Q) = \sqrt{6}/2$. $\big[$Otros planteamientos son posibles.$\big]$

3.- **(a)** (1 punto) : 0'5 puntos por la definición y 0'5 puntos por la representación. **(b)** (1 punto) : 0'5 puntos por "f es derivable en todo $\mathbb{R}$ cuando $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$", y 0'5 puntos por obtener que f sí es derivable en $x = 0$ porque ambos límites valen 0. **(c)** (0'5 puntos) : $f'(x) = -2|x|$ en toda la recta real.

4.- (2'5 puntos) : 0'5 puntos por hacer bien cada una de las tres integrales inmediatas, 0'5 puntos por sustituir bien los límites de integración, y 0'5 puntos por concluir que la integral definida vale $\ln 2$.

OPCIÓN B

1.- **(a)** (1'25 puntos) : 0'75 puntos por la igualdad $|A| = 2(m-1)^2$, y 0'5 puntos por deducir que el sistema es de Cramer si $m \neq 1$. **(b)** (1'25 puntos) : 0'75 punto por un planteamiento correcto, y 0'5 puntos por obtener que la solución es $\big(2, \frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\big)$.

2.- (2'5 puntos) : 1'5 puntos por un planteamiento correcto, y 1 punto por obtener que hay dos soluciones, los puntos $P = (0, 0, 0)$ y $Q = (0, 1, 1)$.

3.- **(a)** (1'75 puntos) : el dominio es $\mathbb{R} - \{1\}$ (0'25 puntos) y $x = 1$ es asíntota vertical (0'25 puntos); como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 1$ y $\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - x\big) = 2$ $\big($o como el cociente de la division $x^3/(x-1)^2$ es $x + 2\big)$, la recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua por ambos lados (0'5 puntos); los ceros de la primera derivada son $x = 0$ y $x = 3$ (0'25 puntos); en $x = 3$ hay mínimo porque $f''(3) > 0$ (0'25 puntos); en $x = 0$ hay inflexión porque $f''(0) = 0$ y $f'''(0) \neq 0$ (0'25 puntos). **(b)** : 0'75 puntos.

4.- **(a)** (1 punto) : 0'25 puntos por la representación de la curva, 0'25 por la representación de las rectas y 0'5 puntos por la determinación del recinto pedido. **(b)** (1'5 puntos) : 1 punto por el planteamiento de la integral definida para calcular el área ($A = \int_0^1 (1 - x^2)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 (1 - x^2)\,\mathrm{d}x$), y 0'5 puntos por el cálculo del área ($A = 2$ unidades).