CUESTIONES TEÓRICAS

Matemáticas II

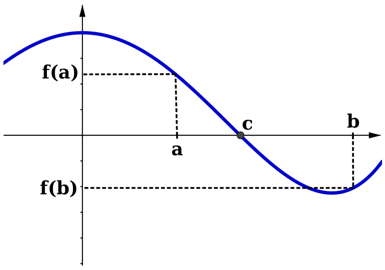
Curso 2013-14

1. **Definición de función continua:** Una función es continua en un punto a si existe el valor de la función en dicho punto, el límite de la función cuando x tiende a a y ambos valores son iguales, es decir:

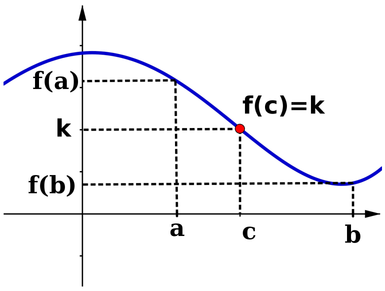
$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Una función es continua en un intervalo abierto si lo es en cada uno de sus puntos. Será continua en el intervalo cerrado si lo es en el intervalo abierto y es continua por la derecha en a y por la izquierda en b.

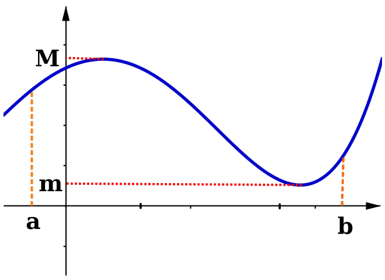
2. **Teorema de Bolzano:** Si f(x) es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma en sus extremos valores de signo contrario, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$



3. **Teorema de los valores intermedios (Teorema de Darboux):** Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y **k** es cualquier número tal que $f(a) < k < f(b)$, entonces existe al menos un número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.



4. **Teorema de Weierstrass:** Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, la función toma un valor que es máximo absoluto y otro valor que es mínimo absoluto en $[a, b]$, es decir, existen dos valores **c** y **d** en $[a, b]$ tal que $f(d) = m \leq f(x) \leq M = f(c)$ para todo $x \in [a, b]$.



5. **Definición de derivada:** Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $[a, b]$ y sea $x_0 \in (a, b)$. Se dice que f es derivable en x_0, si existe el límite:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si hacemos $h = x - x_0$ es evidente que cuando $x \to x_0$ tenemos que $h \to 0$. En ese caso el límite anterior quedaría:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Podemos utilizar cualquiera de los dos límites para calcular una derivada.

6. **Interpretación geométrica de la derivada:** La derivada de la función en un punto $(a, f(a))$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto:

$$m_{tg} = f'(a)$$

Usando la ecuación punto pendiente tendríamos que la ecuación de la recta tangente se calcularía:

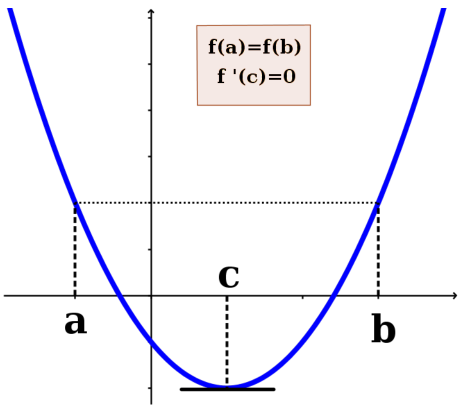
$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

7. **Continuidad y derivabilidad:** Si una función $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces $f(x)$ es continua en $x = a$. Por el contrario una función puede ser continua en un punto y no ser derivable. Digamos que ser derivable es "pedirle" algo más a la función que ser continua.

8. **Regla de la cadena:** La regla de la cadena es una fórmula para derivar funciones compuestas. Si tenemos dos funciones **g** y **f** tenemos que:

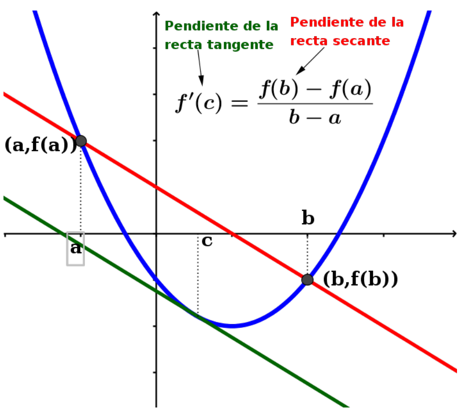
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

9. **Teorema de Rolle:** Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.



10. **Teorema del valor medio del cálculo diferencial o de Lagrange:** Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



11. **Monotonía:** Estudiar la monotonía de una función es estudiar en qué intervalos la función es creciente y en cuales es decreciente.

    a) *Función creciente:* Una función f es creciente en un intervalo (a, b) si para cualquier par de números x_1, x_2 del intervalo (a, b), $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
    Si f es una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f'(x) > 0$ en todo el intervalo, entonces la función es creciente en $[a, b]$.

    b) *Función decreciente:* Una función f es decreciente en un intervalo (a, b) si para cualquier par de números x_1, x_2 del intervalo (a, b), $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
    Si f es una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f'(x) < 0$ en todo el intervalo, entonces la función es decreciente en $[a, b]$.

12. **Máximos y mínimos relativos:**

    a) *Máximo relativo:* Una función f tiene un máximo relativo en $x = c$ si existe un intervalo abierto (a, b) tal que $c \in (a, b)$ y $f(c) > f(x)$ para todo $x \in (a, b); x \neq c$.
    Si f es derivable en $x = c$, $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$ habrá un máximo relativo en $x = c$.

    b) *Mínimo relativo:* Una función f tiene un mínimo relativo en $x = c$ si existe un intervalo abierto (a, b) tal que $c \in (a, b)$ y $f(c) < f(x)$ para todo $x \in (a, b); x \neq c$.
    Si f es derivable en $x = c$, $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$ habrá un mínimo relativo en $x = c$.

13. **Puntos de inflexión:** Un punto de inflexión es un punto en el que la gráfica cambia de tipo de curvatura.
    Si f es derivable hasta la tercera derivada y en un punto x se cumple que $f''(x) = 0$ y $f'''(x) \neq 0$, entonces la función tiene un punto de inflexión en x.

14. **Regla de L'Hôpital:** Sean f y g dos funciones derivables en un entorno de a.
    Si el $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y el $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, y existe el $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces:

    $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

    También es aplicable, como se menciona antes, a la indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Con ciertas modificaciones pueden resolverse el resto de los tipos de indeterminación.

15. **Función primitiva:** Una primitiva de una función $f(x)$ es otra función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

16. **Integral indefinida:** La integral indefinida de una función $f(x)$ es el conjunto $F(x) + K$ de todas sus primitivas. Se representa por:

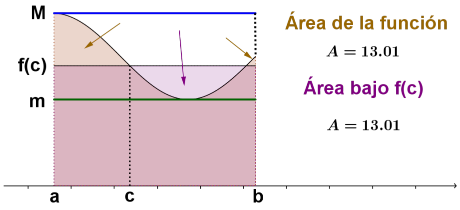
    $$\int f(x)\, dx = F(x) + K \qquad \text{tal que } F'(x) = f(x) \text{ y } K \in \mathbb{R}$$

17. **Integración por partes:** El método de integración por partes se basa en la derivada de un producto y se utiliza para resolver algunas integrales de productos. Hay que descomponer la integral en dos partes, a una la llamaremos **u** y a la otra **dv**. Aplicaremos la siguiente fórmula:

    $$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

18. **Teorema del valor medio del cálculo integral:** Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces existe un $c \in [a, b]$ tal que:

    $$\int_a^b f(x)\, dx = f(c) \cdot (b - a)$$



19. **Regla de Barrow:** Si f es una función continua en $[a, b]$ y G es una primitiva suya, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

20. **Definición de matriz:** Una matriz es una tabla de números distribuidos en filas y columnas. Se representa por:

$$A = (a_{ij})_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se dice que es de dimensión mxn, es decir, que tiene m filas y n columnas.

21. **Matriz traspuesta:** Dada una matriz de dimensión mxn se llama matriz traspuesta a la matriz de orden nxm que se obtiene al intercambiar las filas por las columnas.

22. **Producto de matrices:** Dadas dos matrices A y B, tales que el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B, es decir,

$$A \in M_{mxn} \text{ y } B \in M_{nxp}$$

se puede realizar el producto $A \cdot B$, resultando una matriz C que tiene el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que B, es decir, $C \in M_{mxp}$.
Cada elemento de esta matriz C se obtiene multiplicando cada fila de A por todas y cada una de las columnas de B.

23. **Matriz inversa:** Una matriz cuadrada de orden n se dice que es regular o invertible, si existe otra matriz cuadrada del mismo orden, a la que denominamos A^{-1}, de tal forma que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

siendo I la matriz unidad de orden n, esto es,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Para que una matriz tenga inversa tiene que cumplir que $|A| \neq 0$. En este caso la matriz inversa se calcula de la siguiente forma:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t$$

donde Adj(A) es la matriz adjunta de A, cuyo elemento ij-ésimo es el menor de orden n-1 obtenido quitando a la matriz A la fila y la columna en las que está dicho elemento.

24. **Propiedades de los determinantes:**

a) *Línea nula:* Si una línea es nula el valor del determinante es cero.

b) *Línea igual o proporcional:* Si tenemos dos líneas iguales o proporcionales el determinante vale cero.

c) *Línea combinación lineal de las demás:* Si hay una línea que es combinación lineal de las demás el determinante vale cero.

d) *Cambiar dos líneas paralelas:* Si intercambiamos dos líneas paralelas, su determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -27$$

e) *Cambiar una línea por una combinación lineal:* Si en una matriz se cambia una línea por una combinación lineal de ella (sin multiplicarla ni dividirla por ningún número) con las restantes, su determinante no varía. Esto nos permite hacer ceros aplicando Gauss siempre que no multipliquemos por nada la línea que vamos a cambiar.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} \overset{F_2=F_2-2F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

f) *Determinante de la matriz traspuesta:* El determinante de una matriz y su traspuesta coinciden.

$$|A| = \left|A^t\right|$$

g) *Determinante de la matriz inversa:* El determinante de la matriz inversa es igual al inverso del determinante de la matriz.

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

h) *Multiplicación por un número:* Si multiplicamos una línea de una matriz por un número, el valor del determinante de dicha matriz queda multiplicado por dicho número.

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 4 & 25 & 6 \\ 7 & 40 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

El primer determinante se diferencia del segundo en que hemos multiplicado la segunda columna por 5. En la práctica lo que podemos hacer es lo que vemos en el ejemplo anterior, es decir, sacar factor común un número que esté multiplicando a línea.

i) *Determinante del producto de dos matrices:* El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

25. **Combinación lineal:** Un vector $\vec{v}$ es *combinación lineal* de un conjunto de vectores $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_n}$ si podemos encontrar números reales $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de tal forma que:

$$\vec{v} = x_1 \cdot \vec{u_1} + x_2 \cdot \vec{u_2} + \cdots + x_n \cdot \vec{u_n}$$

26. **Dependencia e independencia lineal de vectores:** Dado un conjunto de vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$, se dice que estos vectores son *linealmente dependientes* si existen números $a_1, a_2, \cdots, a_n$, no todos iguales a cero, tal que:

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \cdots + a_n \cdot v_n = \vec{0}$$

Si la única forma de conseguir eso es que todos sean nulos decimos que los vectores son *linealmente independientes*. Más concretamente, un conjunto de vectores es *linealmente dependiente* si uno de ellos puede ponerse como combinación lineal de los demás. Si ninguno puede ponerse como combinación de los demás el conjunto se dice que es *linealmente independiente.*

27. **Rango de una matriz:** El rango de una matriz es el número máximo de columnas (filas respectivamente) que son linealmente independientes. El rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos.

28. **Sistemas de Cramer:** Un sistema decimos que es de Cramer si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de lo coeficientes es distinto de cero.

29. **Teorema de Rouché-Fröbenius:** Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes (C) es igual al rango de la ampliada (A):

$$\text{Un sistema es compatible } \Longleftrightarrow Rg(C) = Rg(A)$$

Consecuencias del teorema: Sea $A \cdot X = B$ un sistema de ecuaciones y n el número de incógnitas. Entonces ocurre:

a) Si $Rg\,C = Rg\,A = n \Longrightarrow$ El sistema es compatible determinado.
b) Si $Rg\,C = Rg\,A < n \Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.
c) Si $Rg\,C < Rg\,A \Longrightarrow$ El sistema es incompatible.

30. **Producto escalar. Propiedades.** El producto escalar de dos vectores no nulos, es el número que se obtiene al realizar el siguiente producto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos\alpha$$

donde α es el ángulo que forman los dos vectores.
Si alguno de los vectores es el vector nulo el producto escalar es cero.
Si tenemos las coordenadas de los vectores, es decir, si $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ el producto escalar queda:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

El producto escalar tiene las siguientes propiedades:

a) El producto escalar de un vector no nulo por si mismo es un número real positivo: $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 > 0$
Si $\vec{u} = \vec{0}$ el producto escalar será cero.
b) Conmutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
c) Asociativa: $k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k \cdot \vec{v})$
d) Distributiva: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

31. **Producto vectorial. Propiedades:** El producto vectorial de dos vectores linealmente independientes es un vector que se representa por $\vec{u}$ x $\vec{v}$ que tiene las siguientes características:

a) *Módulo:* Se obtiene con el siguiente producto:

$$|\vec{u} \text{ x } \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen\alpha$$

donde α es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
b) *Dirección:* La ortogonal a los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
c) *Sentido:* El de avance de un tornillo que rota de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Si los vectores son linealmente dependientes el producto vectorial es el vector $\vec{0}$.
Analíticamente, si tenemos que $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, el producto vectorial se calcula usando la siguiente fórmula:

$$\vec{u} \text{ x } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

El producto vectorial tiene las siguientes propiedades:

a) Anticonmutativa: $\vec{u}$ x $\vec{v} = -\vec{v}$ x $\vec{u}$

b) Asociativa: $k \cdot (\vec{u}$ x $\vec{v}) = (k \cdot \vec{u})$ x $\vec{v} = \vec{u}$ x $(k \cdot \vec{v})$

c) Distributiva: $\vec{u}$ x $(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}$ x $\vec{v} + \vec{u}$ x $\vec{w}$

d) *Interpretación geométrica:* El módulo del producto vectorial de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el área del paralelogramo definido por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$A = |\vec{u} \text{ x } \vec{v}|$$

Análogamente, el área de un triángulo determinado por tres puntos A, B y C se calcula usando la fórmula:

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \text{ x } \overrightarrow{AC}\right|$$

32. **Producto mixto:** El producto mixto de tres vectores es el número que se obtiene al realizar las siguientes operaciones:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \text{ x } \vec{w})$$

Analíticamente, si tenemos que $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ y $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, el producto mixto se calcula usando la siguiente fórmula:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Interpretación geométrica: El volumen de un paralelepípedo determinado por tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, es el valor absoluto del producto mixto de esos tres vectores.

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

Análogamente, el volumen de un tetraedro determinado por cuatros puntos A, B, C y D se calcula usando la fórmula:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$$