TEORÍA, FÓRMULAS Y PROCEDIMIENTOS

Matemáticas II

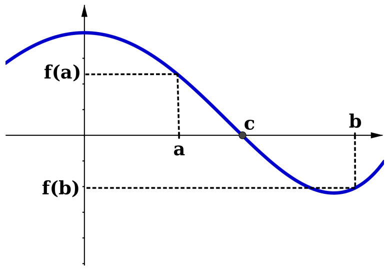
Curso 2013-14

1. **Definición de función continua:** Una función es continua en un punto a si existe el valor de la función en dicho punto, el límite de la función cuando x tiende a a y ambos valores son iguales, es decir:

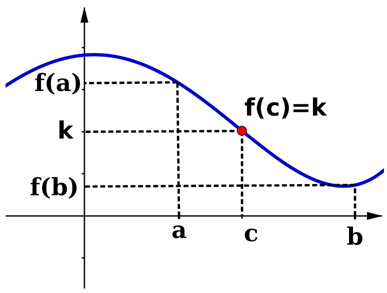
$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Una función es continua en un intervalo abierto si lo es en cada uno de sus puntos. Será continua en el intervalo cerrado si lo es en el intervalo abierto y es continua por la derecha en a y por la izquierda en b.

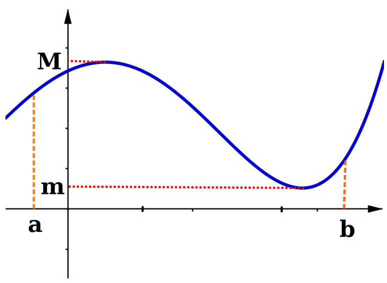
2. **Teorema de Bolzano:** Si f(x) es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma en sus extremos valores de signo contrario, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$



3. **Teorema de los valores intermedios (Teorema de Darboux):** Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y **k** es cualquier número tal que $f(a) < k < f(b)$, entonces existe al menos un número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.



4. **Teorema de Weierstrass:** Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, la función toma un valor que es máximo absoluto y otro valor que es mínimo absoluto en $[a, b]$, es decir, existen dos valores **c** y **d** en $[a, b]$ tal que $f(d) = m \leq f(x) \leq M = f(c)$ para todo $x \in [a, b]$.



5. **Definición de derivada:** Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $[a, b]$ y sea $x_0 \in (a, b)$. Se dice que f es derivable en x_0, si existe el límite:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si hacemos $h = x - x_0$ es evidente que cuando $x \to x_0$ tenemos que $h \to 0$. En ese caso el límite anterior quedaría:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Podemos utilizar cualquiera de los dos límites para calcular una derivada.

6. **Interpretación geométrica de la derivada:** La derivada de la función en un punto $(a, f(a))$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto:

$$m_{tg} = f'(a)$$

Usando la ecuación punto pendiente tendríamos que la ecuación de la recta tangente se calcularía:

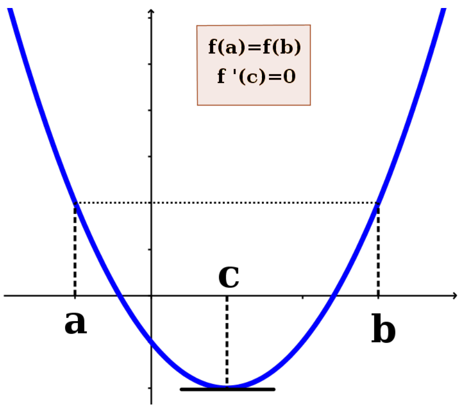
$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

7. **Continuidad y derivabilidad:** Si una función $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces $f(x)$ es continua en $x = a$. Por el contrario una función puede ser continua en un punto y no ser derivable. Digamos que ser derivable es "pedirle" algo más a la función que ser continua.

8. **Regla de la cadena:** La regla de la cadena es una fórmula para derivar funciones compuestas. Si tenemos dos funciones **g** y **f** tenemos que:

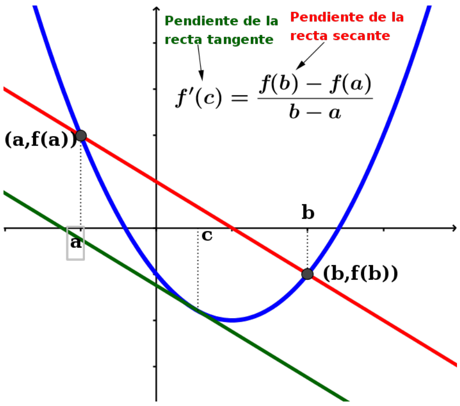
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

9. **Teorema de Rolle:** Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.



10. **Teorema del valor medio del cálculo diferencial o de Lagrange:** Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



11. **Monotonía:** Estudiar la monotonía de una función es estudiar en qué intervalos la función es creciente y en cuales es decreciente.

    a) *Función creciente:* Una función f es creciente en un intervalo (a,b) si para cualquier par de números x_1, x_2 del intervalo (a,b), $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
    Si f es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f'(x) > 0$ en todo el intervalo, entonces la función es creciente en $[a,b]$.

    b) *Función decreciente:* Una función f es decreciente en un intervalo (a,b) si para cualquier par de números x_1, x_2 del intervalo (a,b), $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
    Si f es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f'(x) < 0$ en todo el intervalo, entonces la función es decreciente en $[a,b]$.

12. **Máximos y mínimos relativos:**

    a) *Máximo relativo:* Una función f tiene un máximo relativo en $x = c$ si existe un intervalo abierto (a,b) tal que $c \in (a,b)$ y $f(c) > f(x)$ para todo $x \in (a,b); x \neq c$.
    Si f es derivable en $x = c$, $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$ habrá un máximo relativo en $x = c$.

    b) *Mínimo relativo:* Una función f tiene un mínimo relativo en $x = c$ si existe un intervalo abierto (a,b) tal que $c \in (a,b)$ y $f(c) < f(x)$ para todo $x \in (a,b); x \neq c$.
    Si f es derivable en $x = c$, $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$ habrá un mínimo relativo en $x = c$.

13. **Puntos de inflexión:** Un punto de inflexión es un punto en el que la gráfica cambia de tipo de curvatura.
    Si f es derivable hasta la tercera derivada y en un punto x se cumplen que $f''(x) = 0$ y $f'''(x) \neq 0$, entonces la función tiene un punto de inflexión en x.

14. **Regla de L'Hôpital:** Sean f y g dos funciones derivables en un entorno de a.
    Si el $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y el $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, y existe el $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

    También es aplicable, como se menciona antes, a la indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Con ciertas modificaciones pueden resolverse el resto de los tipos de indeterminación.

15. **Función primitiva:** Una primitiva de una función $f(x)$ es otra función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

16. **Integral indefinida:** La integral indefinida de una función $f(x)$ es el conjunto $F(x) + K$ de todas sus primitivas. Se representa por:

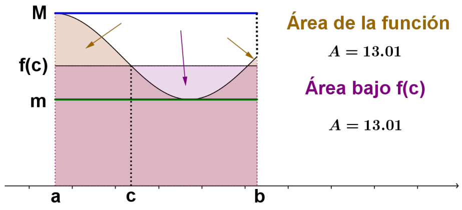
$$\int f(x)\,dx = F(x) + K \qquad \text{tal que } F'(x) = f(x) \text{ y } K \in \mathbb{R}$$

17. **Integración por partes:** El método de integración por partes se basa en la derivada de un producto y se utiliza para resolver algunas integrales de productos. Hay que descomponer la integral en dos partes, a una la llamaremos **u** y a la otra **dv**. Aplicaremos la siguiente fórmula:

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

18. **Teorema del valor medio del cálculo integral:** Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces existe un $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a)$$



19. **Regla de Barrow:** Si f es una función continua en $[a, b]$ y G es una primitiva suya, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

20. **Definición de matriz:** Una matriz es una tabla de números distribuidos en filas y columnas. Se representa por:

$$A = (a_{ij})_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se dice que es de dimensión mxn, es decir, que tiene m filas y n columnas.

21. **Matriz traspuesta:** Dada una matriz de dimensión mxn se llama matriz traspuesta a la matriz de orden nxm que se obtiene al intercambiar las filas por las columnas.

22. **Producto de matrices:** Dadas dos matrices A y B, tales que el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B, es decir,

$$A \in M_{mxn} \text{ y } B \in M_{nxp}$$

se puede realizar el producto $A \cdot B$, resultando una matriz C que tiene el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que B, es decir, $C \in M_{mxp}$.
Cada elemento de esta matriz C se obtiene multiplicando cada fila de A por todas y cada una de las columnas de B.

23. **Matriz inversa:** Una matriz cuadrada de orden n se dice que es regular o invertible, si existe otra matriz cuadrada del mismo orden, a la que denominamos A^{-1}, de tal forma que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

siendo I la matriz unidad de orden n, esto es,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Para que una matriz tenga inversa tiene que cumplir que $|A| \neq 0$. En este caso la matriz inversa se calcula de la siguiente forma:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t$$

donde Adj(A) es la matriz adjunta de A, cuyo elemento ij-ésimo es el menor de orden n-1 obtenido quitando a la matriz A la fila y la columna en las que está dicho elemento.

24. **Propiedades de los determinantes:**

   a) *Línea nula:* Si una línea es nula el valor del determinante es cero.

   b) *Línea igual o proporcional:* Si tenemos dos líneas iguales o proporcionales el determinante vale cero.

   c) *Línea combinación lineal de las demás:* Si hay una línea que es combinación lineal de las demás el determinante vale cero.

   d) *Cambiar dos líneas paralelas:* Si intercambiamos dos líneas paralelas, su determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -27$$

   e) *Cambiar una línea por una combinación lineal:* Si en una matriz se cambia una línea por una combinación lineal de ella (sin multiplicarla ni dividirla por ningún número) con las restantes, su determinante no varía. Esto nos permite hacer ceros aplicando Gauss siempre que no multipliquemos por nada la línea que vamos a cambiar.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} \overset{F_2=F_2-2F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

   f) *Determinante de la matriz traspuesta:* El determinante de una matriz y su traspuesta coinciden.

$$|A| = \left|A^t\right|$$

   g) *Determinante de la matriz inversa:* El determinante de la matriz inversa es igual al inverso del determinante de la matriz.

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

   h) *Multiplicación por un número:* Si multiplicamos una línea de una matriz por un número, el valor del determinante de dicha matriz queda multiplicado por dicho número.

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 4 & 25 & 6 \\ 7 & 40 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

   El primer determinante se diferencia del segundo en que hemos multiplicado la segunda columna por 5. En la práctica lo que podemos hacer es lo que vemos en el ejemplo anterior, es decir, sacar factor común un número que esté multiplicando a línea.

   i) *Determinante del producto de dos matrices:* El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

25. **Rango de una matriz:** El rango de una matriz es el número máximo de columnas (filas respectivamente) que son linealmente independientes. El rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos.

26. **Sistemas de Cramer:** Un sistema decimos que es de Cramer si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de lo coeficientes es distinto de cero. En un sistema de Cramer, cada incógnita es el cociente de dos determinantes:

   a) El determinante del denominador es el determinante de la matriz de los coeficientes.

   b) El determinante del numerador es el que resulta de sustituir, en el determinante de los coeficientes, la columna correspondiente a los coeficientes de la incógnita que se despeja, por lo términos independientes.

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

Donde $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son las incógnitas del sistema.

27. **Teorema de Rouché-Fröbenius:** Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes (C) es igual al rango de la ampliada (A):

$$\text{Un sistema es compatible } \Longleftrightarrow Rg(C) = Rg(A)$$

Consecuencias del teorema: Sea $A \cdot X = B$ un sistema de ecuaciones y n el número de incógnitas. Entonces ocurre:

a) Si $Rg\,C = Rg\,A = n \Longrightarrow$ El sistema es compatible determinado.

b) Si $Rg\,C = Rg\,A < n \Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

c) Si $Rg\,C < Rg\,A \Longrightarrow$ El sistema es incompatible.

28. **Definición de vector:** Un vector fijo es una segmento orientado. Se representa por $\overrightarrow{AB}$. El punto A es el origen y el punto B el extremo. Las características de un vector son:

a) *Módulo:* Es su longitud. Se representa por $|\overrightarrow{AB}|$.

b) *Dirección* Es la dirección de la recta que lo contiene.

c) *Sentido* El que va del origen al extremo.

Un vector libre es, pues, el conjunto de los vectores del espacio que tienen mismo módulo, misma dirección y mismo sentido. Y cada vector fijo que pertenezca al vector libre lo llamaremos representante de ese vector libre.

29. **Combinación lineal:** Un vector $\vec{v}$ es *combinación lineal* de un conjunto de vectores $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_n}$ si podemos encontrar números reales $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de tal forma que:

$$\vec{v} = x_1 \cdot \vec{u_1} + x_2 \cdot \vec{u_2} + \cdots + x_n \cdot \vec{u_n}$$

30. **Operaciones con vectores:**

a) *Suma de vectores:* Para sumar o restar vectores analíticamente se suman o se restan sus coordenadas. Geométricamente se haría como se ve en la gráfica 1.

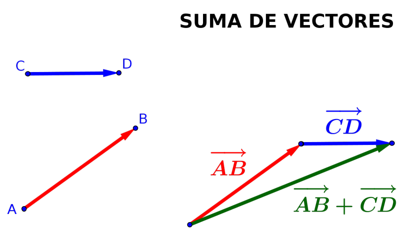


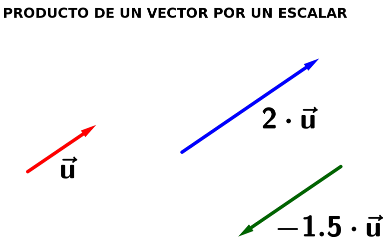
Figura 1: Suma y resta de vectores

b) *Producto de vectores por un escalar:* Para multiplicar analíticamente un número por un vector, se multiplica el número por las coordenadas del vector..
Geométricamente el resultado es un vector que tendría la misma dirección que el vector, el módulo queda multiplicado por el número y el sentido será el mismo si el número es positivo y el contrario si es negativo.

31. **Propiedades de las operaciones con vectores:**

a) *Suma:*

- Asociativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w})$
- Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$



- Elemento opuesto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
- Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

b) *Producto por escalares:*

- Asociativa: $k \cdot (k' \cdot \vec{u}) = (k \cdot k') \cdot \vec{u}$
- Distributiva respecto a la suma de vectores: $k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$
- Distributiva respecto a los escalares: $(k + k') \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u} + k' \cdot \vec{u}$
- Elemento unidad: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

32. **Dependencia e independencia lineal de vectores:** Dado un conjunto de vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$, se dice que estos vectores son *linealmente dependientes* si existen números $a_1, a_2, \cdots, a_n$, no todos iguales a cero, tal que:

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \cdots + a_n \cdot v_n = \vec{0}$$

Si la única forma de conseguir eso es que todos sean nulos decimos que los vectores son *linealmente independientes.* Más concretamente, un conjunto de vectores es *linealmente dependiente* si uno de ellos puede ponerse como combinación lineal de los demás. Si ninguno puede ponerse como combinación de los demás el conjunto se dice que es *linealmente independiente.*

33. **Producto escalar. Propiedades.** El producto escalar de dos vectores no nulos, es el número que se obtiene al realizar el siguiente producto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos\alpha$$

donde α es el ángulo que forman los dos vectores.
Si alguno de los vectores es el vector nulo el producto escalar es cero.
Si tenemos las coordenadas de los vectores, es decir, si $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ el producto escalar queda:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

El producto escalar tiene las siguientes propiedades:

a) El producto escalar de un vector por si mismo es un número real positivo: $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 > 0$
Si $\vec{u} = \vec{0}$ el producto escalar será cero.

b) Conmutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

c) Asociativa: $k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k \cdot \vec{v})$

d) Distributiva: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

34. **Producto vectorial. Propiedades:** El producto vectorial de dos vectores linealmente independientes es un vector que se representa por $\vec{u}$ x $\vec{v}$ que tiene las siguientes características:

a) *Módulo:* Se obtiene con el siguiente producto:

$$|\vec{u} \text{ x } \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen\alpha$$

donde α es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) *Dirección:* La ortogonal a los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) *Sentido:* El de avance de un tornillo que rota de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Si los vectores son linealmente dependientes el producto vectorial es el $\vec{0}$.
Analíticamente, si tenemos que $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, el producto vectorial se calcula usando la siguiente fórmula:

$$\vec{u} \text{ x } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

El producto vectorial tiene las siguientes propiedades:

a) Anticonmutativa: $\vec{u} \text{ x } \vec{v} = -\vec{v} \text{ x } \vec{u}$

b) Asociativa: $k \cdot (\vec{u} \text{ x } \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \text{ x } \vec{v} = \vec{u} \text{ x } (k \cdot \vec{v})$

c) Distributiva: $\vec{u} \text{ x } (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \text{ x } \vec{v} + \vec{u} \text{ x } \vec{w}$

d) *Interpretación geométrica:* El módulo del producto vectorial de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el área del paralelogramo definido por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$A = |\vec{u} \text{ x } \vec{v}|$$

Análogamente, el área de un triángulo determinado por tres puntos A, B y C se calcula usando la fórmula:

$$A = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \text{ x } \overrightarrow{AC} \right|$$

35. **Producto mixto:** El producto mixto de tres vectores es el número que se obtiene al realizar las siguientes operaciones:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \text{ x } \vec{w})$$

Analíticamente, si tenemos que $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ y $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, el producto mixto se calcula usando la siguiente fórmula:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Interpretación geométrica: El volumen de un paralelepípedo determinado por tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, es el valor absoluto del producto mixto de esos tres vectores.

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

Análogamente, el volumen de un tetraedro determinado por cuatros puntos A, B, C y D se calcula usando la fórmula:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right] \right|$$

36. **Ecuaciones de la recta:** Una recta queda determinada por un punto y un vector director. cualquier otra forma puede reducirse a esta. Sea $A(a_1, a_2, a_3)$ dicho punto y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ el vector. Las distintas ecuaciones de la recta son:

a) *Ecuación vectorial:* $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$ donde $t \in \mathbb{R}$. En coordenadas tendríamos, $(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(v_1, v_2, v_3)$

b) *Ecuaciones paramétricas:* Igualando coordenada a coordenada obtendríamos la dicha ecuación:

$$r: \begin{cases} x = a_1 + t \cdot v_1 \\ y = a_2 + t \cdot v_2 \\ z = a_3 + t \cdot v_3 \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R}$$

c) *Ecuación continua:* El parámetro t tiene que valer lo mismo en todas las ecuaciones, luego despejando en cada una e igualando todo obtenemos esta ecuación. Si una coordenada del vector es cero se 'permite' poner cero en el denominador.

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

d) *Ecuaciones implícitas:* De la anterior doble igualdad sacamos, igualando dos a dos, dos ecuaciones. Otra forma de expresar las ecuaciones implícitas es poner la recta como corte de dos planos, es decir,

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

37. **Ecuaciones del plano:** Un plano queda determinado por un punto y dos vectores o un punto y su vector normal. Cualquier otra forma puede reducirse a esta. Sea $A(a_1, a_2, a_3)$ dicho punto y $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ los vectores citados.

a) *Ecuación vectorial:* $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. En coordenadas tendríamos,

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

b) *Ecuaciones paramétricas:* Igualando coordenada a coordenada obtendríamos la dicha ecuación:

$$r : \begin{cases} x = a_1 + \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1 \\ y = a_2 + \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2 \\ z = a_3 + \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3 \end{cases} ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

c) *Ecuación general o implícita:* Tiene la siguiente forma $Ax + By + Cz + D = 0$. Para obtenerla, se desarrolla el determinante:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

d) *Ecuación si conozco el vector normal:* El vector normal, $\vec{n}(A, B, C)$, es ortogonal a cualquier vector $\overrightarrow{AX}$ donde A y X son puntos del plano, por tanto la ecuación saldrá de

$$A(x - a_1) + B(y - a_2) + C(z - a_3) = 0$$

Es obvio observar que las coordenadas del vector normal coincidirán con los coeficientes de x, y y z respectivamente.

38. **Posiciones relativas entre rectas y planos:**

a) *Posición relativa entre dos rectas:* Si la recta r viene determinada por $A(a_1, a_2, a_3)$ y por $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ y la recta s por $B(b_1, b_2, b_3)$ y por $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, para estudiar la posición relativa de las dos rectas seguiremos los siguientes pasos:

- Si el vector $\vec{u}$ y el vector $\vec{v}$ son proporcionales entonces las rectas son paralelas o coincidentes. Para distinguir esto último utilizamos el vector $\overrightarrow{AB}$. Si este también es proporcional a los anteriores entonces serán coincidentes. Si no lo es serán paralelas.
- Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales entonces las rectas se cortan o se cruzan. En el primer caso los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ son linealmente dependientes (están en el mismo plano) y en el segundo, dichos vectores serán linealmente independientes. En la práctica calcularemos el determinante:

$$M = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Si sale cero las rectas se cortan, pero si sale distinto de cero las rectas se cruzan.

b) *Posición relativa entre una recta y un plano:* Si la recta viene determinada por $A(a_1, a_2, a_3)$ y por $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ y el plano tiene ecuación general $\pi \equiv Ax + By + Cz = D$, es decir, el vector normal es $\vec{n}(A, B, C)$ se tiene que

- Si $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \Longrightarrow \vec{v} \perp \vec{n}$ se pueden dar dos casos:

- Si $A \in \pi \Longrightarrow$ la recta está contenida en el plano.
- Si $A \notin \pi \Longrightarrow$ la recta es paralela al plano.

- Si $\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0 \Longrightarrow$ la recta corta al plano en un punto.

c) *Posición relativa de dos planos:* Dados los planos $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$ pueden darse tres casos.

- Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'} \Longrightarrow$ los planos son coincidentes.
- Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'} \Longrightarrow$ los planos son paralelos.
- Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'}$ o bien $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{C}{C'} \Longrightarrow$ los planos se cortan en una recta.

d) *Posición relativa de tres planos:* Consideremos los planos $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$, $\pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$ y $\pi'' \equiv A''x+B''y+C''z+D''=0$. Para estudiar la posición relativa de estos tres planos vamos a considerar el sistema que forman dichos planos. Tendremos en cuenta también lo visto en el apartado anterior.

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} Ax & + & By & + & Cz & + & D & = & 0 \\ A'x & + & B'y & + & C'z & + & D' & = & 0 \\ A''x & + & B''y & + & C''z & + & D'' & = & 0 \end{array}\right\}$$

Se nos pueden producir los siguientes casos:

- $RgC = RgA = 1 \Longrightarrow$ El sistema será compatible indeterminado y necesitaremos 2 parámetros, por lo que el conjunto de soluciones será un plano (uno cualquiera de ellos). Este caso es fácil distinguirlo, pues las ecuaciones de lo tres planos serán proporcionales.
- $RgC = 1 \neq 2 = RgA \Longrightarrow$ El sistema será incompatible y pueden producirse dos casos que distinguiremos mirando las ecuaciones de los planos y comparándolas dos a dos (aplicamos lo visto en el apartado anterior)
  - Tres planos paralelos.
  - Dos coincidentes y uno paralelo a ellos.
- $RgC = 2 = RgA \Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado y necesitará un parámetro. Por tanto los planos se cortan en una recta. Una vez más pueden producirse dos casos, que distinguiremos mirando las ecuaciones de los planos:
  - Dos coincidentes y uno que los corta.
  - Los tres planos son distintos y se cortan en una recta.
- $RgC = 2 \neq 3 = RgA \Longrightarrow$ El sistema será incompatible y distinguiremos de nuevo dos casos, que una vez más aclararemos mirando las ecuaciones de los planos.
  - Los tres planos se cortan dos a dos formando una superficie prismática.
  - Dos planos son paralelos y uno los corta.
- $RgC = 3 = RgA \Longrightarrow$ Sistema compatible determinado y por lo tanto los tres planos se cortan en un punto.

39. **Distancias:** En este apartado vamos a ver las fórmulas que nos permiten calcular las distancias entre los distintos elementos del espacio. Vamos a considerar los puntos $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ y $P(p_1, p_2, p_3)$. Así mismo serán $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores directores de rectas. Tendremos

a) *Distancia entre dos puntos:* La distancia entre dos puntos es el módulo del vector que une los dos puntos:

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2}$$

b) *Distancia de un punto a una recta:* Si el punto es P y la recta viene determinada por el punto A y el vector $\vec{v}$, la fórmula que nos permite calcular la distancia es

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\, x\, \vec{v}\right|}{|\vec{v}|}$$

c) *Distancia entre dos rectas:* La distancia entre dos rectas es la menor distancia entre ellas. Por tanto, si las rectas se cortan o son coincidentes la distancia es cero. Si son paralelas será la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra. Si las rectas se cruzan la distancia la calcularemos con la siguiente fórmula:

$$d(r,s) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v} \right] \right|}{|\vec{u}\, x\, \vec{v}|}$$

d) *Distancia de un punto a un plano:* Si tenemos el punto $P(p_1, p_2, p_3)$ y el plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ la distancia viene dada por:

$$d(P,\pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

e) *Distancia de una recta a un plano:* Si la recta está contenida en el plano o lo corta la distancia será cero. Si la recta es paralela al plano la distancia será la de cualquier punto de la recta al plano.

f) *Distancia entre dos planos:* Si los planos se cortan o son coincidentes la distancia será cero. Si los planos son paralelos la distancia será la de cualquier punto de uno de los planos al otro.

40. **Ángulos entre rectas y planos:** Para calcularlo vamos a utilizar los vectores directores de las rectas ($\vec{u}$, $\vec{v}$) y los vectores normales de los planos ($\vec{n}$, $\vec{n'}$).

a) *Ángulo formado por dos rectas:* Si las rectas son paralelas o coincidentes el ángulo formado es cero. Si se cortan o se cruzan el ángulo se calcula con la siguiente fórmula:

$$cos\, \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \Longrightarrow \alpha = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

b) *Ángulo formado por una recta y un plano:* Si la recta está contenida en el plano o es paralela a él, el ángulo será cero. Si la recta corta al plano el ángulo formado se calcula usando la siguiente fórmula:

$$sen\, \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} \Longrightarrow \alpha = \mathrm{arc\,sen} \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

c) *Ángulo formado por dos planos:* Si los planos son coincidentes o paralelos el ángulo será cero. Si los planos se cortan el ángulo se calcula usando la siguiente fórmula:

$$cos\, \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n'}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n'}|} \Longrightarrow \alpha = \arccos \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n'}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n'}|}$$

41. **Paralelismo y perpendicularidad:**

a) *Paralelismo:*

- *Entre rectas:* Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son proporcionales.
- *Recta y plano:* Una recta es paralela a un plano si su vector director es ortogonal al vector normal del plano.
- *Entre planos:* Dos planos son paralelos si sus vectores normales son proporcionales.

b) *Perpendicularidad:*

- *Entre rectas:* Dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son ortogonales.
- *Entre recta y plano:* Una recta es perpendicular a un plano si el vector director de la recta es proporcional al vector normal del plano.
- *Entre planos:* Dos planos son perpendiculares si sus vectores normales son ortogonales.

42. **Recta que corta perpendicularmente a otras dos:** Para calcular dicha recta vamos a seguir los siguientes pasos:

a) Se hallan los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de las rectas **r** y **s**.

b) Un vector director de la recta que estamos buscando sería el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.

c) Vamos a expresar la ecuación de la recta en forma general, es decir, como corte de dos planos:

- El plano π que contiene a la recta **r** y al vector $\vec{n}$.
- El plano π' que contiene a la recta **s** y al vector $\vec{n}$.