JUNIO 2012

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro cuestiones de la opción elegida puntuará 2’5 puntos como máximo. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1.- Discuta, en función del parámetro a, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & -\ y & +\ 2z & = & a \\ -\ x & +\ y & -\ az & = & 1 \\ x & +\ ay & +\ (1+a)z & = & -1 \end{array}\right\}$$

(no hay que resolverlo en ningún caso).

2.- Calcule todos los vectores de módulo 2 que son ortogonales a los vectores $\vec{u} = (1, -1, -1)$ y $\vec{v} = (-1, 2, 1)$.

3.- (a) (1’75 puntos) Determine el punto (x, y) de la parábola $y = x^2$ en el que la suma $x + y$ alcanza su mínimo valor.

(b) (0’75 puntos) Explique por qué dicho mínimo es absoluto.

4.- (a) (0’5 puntos) Calcule los puntos de corte de la recta $2y - x = 3$ y de la recta $y = 1$ con la rama hiperbólica $xy = 2$, $x > 0$.

(b) (0’5 puntos) Dibuje el recinto plano limitado por las tres curvas del apartado anterior.

(c) (1’5 puntos) Calcule el área de dicho recinto.

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro preguntas de la opción elegida puntuará como máximo **2'5 puntos**. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN B

1.- Calcule la matriz inversa de la matriz $A = B^2 - 2 \cdot C$, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.- Calcule la distancia del punto $P = (3, -1, 2)$ a la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{array} \right. .$$

3.- Considere la función $f(x) = |x| + |x - 2|$.
(a) (1 punto) Exprese $f(x)$ como una función definida a trozos.
(b) (1 punto) Dibuje la gráfica de $f(x)$.
(c) (0'5 puntos) Escriba el intervalo abierto de la recta real formado por los puntos en los que $f(x)$ es derivable y se anula su derivada.

4.- Calcule la siguiente integral de una función racional:

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \, \mathrm{d}x.$$

OPCIÓN A

1.- (2'5 puntos): 1 punto por el cálculo del determinante de la matriz de coeficientes del sistema y de los valores del parámetro que lo anulan $\big(|A| = (a+1)(a-2)\big)$; 0'5 puntos por la discusión de cada uno de los tres casos (si $a \neq -1$ y $a \neq 2$, el sistema es compatible determinado; si $a = 2$ el sistema es incompatible, y si $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado).

2.- (2'5 puntos): 1'5 puntos por cualquier planteamiento correcto, y 1 punto por la resolución $\big($los vectores son $(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})\big)$.

3.- **(a)** (1'75 puntos): 1 punto por cualquier planteamiento correcto, y 0'75 punto por el cálculo del punto donde se alcanza el mínimo $\big($el punto es $\big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\big)\big)$. **(b)**: 0'5 puntos $\big(h(x) = x+x^2$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, -\frac{1}{2})$ porque $h'(x) = 1 + 2x < 0$ en dicho intervalo, y $\ldots\big)$.

4.- **(a)** (0'5 puntos): 0'25 puntos por cada uno de los dos puntos a determinar: $(1, 2)$ y $(2, 1)$. **(b)** (0'5 puntos): 0'25 puntos por las dos rectas bien pintadas, y 0'25 puntos por la rama hiperbólica pintada aproximadamente. **(c)** (1'5 puntos): 1 punto por el planteamiento de la integral definida para calcular el área $\big(A = \int_{-1}^{1} \big(\frac{1}{2}(x + 3) - 1\big)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \big(\frac{2}{x} - 1\big)\,\mathrm{d}x\big)$, y 0'5 puntos por el cálculo del área $\big(A = 2\,\ln 2 = \ln 4\big)$.

OPCIÓN B

1.- (2'5 puntos): 1 punto por el cálculo correcto de A; 1'5 puntos por el cálculo de A^{-1} (0'75 por la adjunta de A, 0'5 por el determinante de A, y 0'25 por la expresión final de A^{-1}): $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.- (2'5 puntos): 1 punto por cualquier planteamiento correcto que lleve a la obtención del punto $Q \in r$ tal que $\mathrm{d}(P, r) = \mathrm{d}(P, Q)$; 1 punto por obtener que $Q = (1/2, -1, -1/2)$; 0'5 puntos por calcular $\mathrm{d}(P, Q) = (5\sqrt{2})/2$. $\big[$Otros planteamientos son posibles, como la utilización del producto vectorial.$\big]$

3.- **(a)**: 1 punto ($f(x) = 2(1-x)$ si $x \leq 0$, $f(x) = 2$ si $x \in (0, 2)$ y $f(x) = 2(x-1)$ si $2 \leq x$). **(b)**: 1 punto. **(c)**: 0'5 puntos (el intervalo es $(0, 2)$).

4.- (2'5 puntos): 0'5 puntos por la expresión de la fracción $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ como la suma $\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$; 1 punto por la descomposición de $\frac{2}{x^2-1}$ como suma de fracciones simples $\big(\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\big)$; 1 punto por el cálculo de la integral $\big(\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C = x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C\big)$.