Julio 2015

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro preguntas de la opción elegida puntuará como máximo **2'5 puntos**. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1.- (a) (1 punto) Enuncie el *teorema del valor medio de Lagrange*.

(b) (1'5 puntos) Aplicando a la función $f(x) = x^3 + 2x$ el anterior teorema, pruebe que cualesquiera que sean los números reales $a < b$ se cumple la desigualdad $a - b < b^3 - a^3$.

2.- (a) (0'5 puntos) Diga cuándo una función $F(x)$ es una primitiva de otra función $f(x)$.

(b) (0'5 puntos) Diga cómo puede comprobarse, sin necesidad de hacer derivadas, si dos funciones $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de una misma función.

(c) (1'5 puntos) Diga, razonando la respuesta, si las funciones

$$F(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{y} \qquad G(x) = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x}$$

son primitivas de una misma función.

3.- Resuelva la ecuación matricial $AX + 2B = C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

4.- (a) (1 punto) Calcule las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $A = (0, 1, 1)$ y $B = (1, 1, -1)$.

(b) (1'5 puntos) Calcule todos los puntos de la recta r que equidistan de los planos $\Pi_1 \equiv x + y = -2$ y $\Pi_2 \equiv x - z = 1$.

Julio 2015

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro preguntas de la opción elegida puntuará como máximo **2'5 puntos**. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN B

1.- **(a)** (1 punto) Estudie el dominio de definición y las asíntotas de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}.$$

(b) (0'75 puntos) Estudie si la gráfica de la función $f(x)$ corta a alguna asíntota oblicua suya.

(c) (0'75 puntos) Represente, aproximadamente, la gráfica de $f(x)$ utilizando los valores $f(1)$ y $f(3)$, y los datos obtenidos en los apartados **(a)** y **(b)**.

2.- Calcule la siguiente integral definida de una función racional:

$$\int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} \frac{x-1}{x^2 - 2x}\, \mathrm{d}x.$$

3.- Determine el rango de la matriz A según los valores de b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b+2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ b+1 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

4.- Sean $\vec{e}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que $\vec{e} \times \vec{u} = (1, 0, -1)$, $\vec{v} \times \vec{e} = (0, 1, 1)$.

(a) (0'75 puntos) Calcule el vector $(\vec{e} \times \vec{u}) \times (\vec{v} \times \vec{e})$.

(b) (1'75 puntos) Calcule el vector $\vec{w} = \vec{e} \times (2\vec{u} - \vec{e} + 3\vec{v})$.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

1.- (a): 1 punto. **(b)** (1'5 puntos) : basta observar que $f'(x) = 3x^2+2 > 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y aplicar directamente el teorema del valor medio (nótese que la desigualdad es una consecuencia directa de la monotonía de la función $y = x^3$).

2.- (a) : 0'5 puntos. **(b)** : 0'5 puntos. **(c)** : 1'5 puntos $\big(F(x) - G(x) = 1$, ó $F'(x) = G'(x)\big)$.

3.- (2'5 puntos) : 1'25 puntos por un planteamiento correcto (observar que A es invertible y despejar X; obtener dos sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas; ...); 1'25 puntos por obtener la solución $X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}$. $\Big[$ Nota: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.$\Big]$

4.- (a) (1 punto) : unas ecuaciones paramétricas son $r \equiv (\lambda, 1, 1-2\lambda)$. **(b)** (1'5 puntos) : 0'75 puntos por un planteamiento correcto (fórmula de la distancia de un punto a un plano), y 0'75 puntos por la resolución correcta $\big($los puntos $(\frac{5}{2}, 1, -4)$ y $(-\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2})\big)$.

OPCIÓN B

1.- (a) (1 puntos) : el dominio es $\mathbb{R} - \{2\}$ (0'25 puntos) y por lo tanto $x = 2$ es asíntota vertical (0'25 puntos); la recta $y = x - 2$ es asíntota oblicua para $x \to -\infty$, y para $x \to +\infty$ (0'5 puntos). **(b)** (0'75 puntos) : con un sencillo cálculo se comprueba que la gráfica no corta a la única recta que es asíntota oblicua. **(c)** : (0'75 puntos) los valores $f(1) = 0 = f(3)$ indican cómo se acerca la gráfica a las asíntotas.

2.- (2'5 puntos) : 0'25 puntos por la descomposición $x^2 - 2x = x(x-2)$; 1 punto por la igualdad $\frac{x-1}{x^2-2x} = \frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-2}$; 0'75 puntos por el cálculo de la integral indefinida $\Big(\int \frac{x-1}{x^2-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big[\ln|x| + \ln|x-2|\big] + C = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x| + C\Big)$; 0'5 puntos por obtener que la integral definida es $\frac{1}{2}\big[\ln 4 - \ln 1\big] = \frac{1}{2}\ln 4 = \ln 4^{1/2} = \ln 2$.

3.- (2'5 puntos) : 1 punto por calcular el determinante y los valores que lo anulan $\big(|A| = -b^2 - b + 2 = -(b-1)(b+2)\big)$; 0'5 puntos por el cálculo del rango en cada uno de los tres casos (si $b \neq 1$ y $b \neq -2$ el rango es 3; si $b = 1$ ó si $b = -2$ el rango es 2).

4.- (a) (0'75 puntos) : 0'5 puntos por la fórmula del producto vectorial y 0'25 puntos por calcular $(\vec{e} \times \vec{u}) \times (\vec{v} \times \vec{e}) = (1, -1, 1)$. **(b)** (1'75 puntos) : para obtener $\vec{w} = (2, -3, -5)$ se utilizan las propiedades del producto vectorial: bilinealidad (0'75 puntos), $\vec{e} \times \vec{e} = 0$ (0'5 puntos), y $\vec{e} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{e})$ (0'5 puntos).