# Junio 2015

**Instrucciones:** El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro preguntas de la opción elegida puntuará como máximo **2'5 puntos**. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

## OPCIÓN A

**1.-** Discuta, en función del parámetro $b$, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & b \\ -2x & - & y & + & (b-1)z & = & -2 \\ bx & + & y & - & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

**2.-** En $\mathbb{R}^3$, considere el plano $\Pi : ax+by+cz=d$, la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array} \right.$, y el punto $P=(1,0,1)$.

**(a)** (1 punto) Obtenga cómo deben ser los números reales $a, b, c, d$ para que el plano $\Pi$ contenga a la recta $r$.

**(b)** (1'5 puntos) Supuesto que $\Pi$ contiene a $r$, pruebe que la distancia del punto $P$ a $\Pi$ es menor o igual a 1: $\mathrm{d}(P,\Pi) \leq 1$.

**3.-** **(a)** (1'75 puntos) Estudie los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$.

**(b)** (0'75 puntos) Estudie si la recta $r$ de ecuación $y = -x - 1 + \ln 2$ es tangente a la gráfica de $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$ en algún punto de inflexión de $f(x)$.

**4.-** Calcule la siguiente suma de integrales definidas

$$\int_0^{\mathrm{e}-1} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \cos x \cdot \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x\,.$$

# JUNIO 2015

**Instrucciones:** El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro cuestiones de la opción elegida puntuará 2'5 puntos como máximo. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

## OPCIÓN B

**1.-** Determine la relación que debe existir entre los parámetros $x$ e $y$ para que las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ conmuten, es decir, para que $A \cdot B = B \cdot A$.

**2.-** Dados en $\mathbb{R}^3$ los planos $\Pi_1 \equiv \; x + y - z = 1$ y $\Pi_2 \equiv \; x - y + z = 1$, obtenga el conjunto $H$ de los puntos de $\mathbb{R}^3$ que distan igual de dichos planos.

**3.-** **(a)** (1 punto) Enuncie el *teorema de Bolzano.*

**(b)** (0'75 puntos) Utilizando el teorema de Bolzano, encuentre un intervalo de la recta real en el que la función polinómica $p(x) = 3x^3 - x + 1$ tenga alguna raíz.

**(c)** (0'75 puntos) Utilizando el teorema de Bolzano, demuestre que las gráficas de las funciones $f(x) = \mathrm{e}^x + \ln(1 + x^2)$ y $g(x) = \mathrm{e}^x + 1$ se cortan en algún punto.

**4.-** **(a)** (0'5 puntos) Represente, aproximadamente, la gráfica de la función $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$ definida en el intervalo $[0, \pi]$.

**(b)** (2 puntos) Calcule el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$, el eje $OX$ y las rectas $x = 0$, $x = \pi$.

## Criterios Específicos de Corrección

### OPCIÓN A

**1.-** (2'5 puntos) : 1 punto por el cálculo del determinante de la matriz de coeficientes y de los valores del parámetro que lo anulan ($|A| = b^2 - 2b$), y 0'5 puntos por la discusión de cada uno de los tres casos (si $b \neq 0$ y $b \neq 2$ el sistema es compatible determinado, si $b = 0$ es incompatible, y si $b = 2$ es compatible indeterminado.)

**2.-** **(a)** (1 punto) : para que $\Pi$ contenga a $r$ debe ser $c = d = 0$ y $(a, b) \neq (0, 0)$. **(b)** (1'5 puntos) : 0'75 puntos por el valor de la distancia $\mathrm{d}(P, \Pi) = |a|/\sqrt{a^2 + b^2}$; 0'75 puntos por deducir de la propiedad $|a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ la desigualdad $\mathrm{d}(P, \Pi) \leq 1$ pedida. [Otros métodos son posibles.]

**3.-** **(a)** (1'75 puntos) : $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ sólo se anula en $x_0 = 0$ (0'5 puntos); los ceros de $f''(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$ son $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ (0'5 puntos); $f(x)$ tiene un mínimo en $x_0 = 0$ porque $f''(0) > 0$ (0'25 puntos); $f'''(x) = \frac{4x^3-12x}{(1+x^2)^3}$, y $f(x)$ tiene inflexión en $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ porque $f'''(1) \neq 0 \neq f'''(-1)$ (0'5 puntos). **(b)** (0'75 puntos) : $r$ no es tangente a la gráfica en $x_1 = 1$ porque $f'(1) \neq -1$, ó porque $(1, f(1)) \notin r$ (0'25 puntos); $r$ sí es tangente a la gráfica en $x_2 = -1$ porque $f'(-1) = -1$ y $(-1, f(-1)) \in r$ (0'5 puntos).

**4.-** (2'5 puntos) : 0'75 puntos por hacer bien la 1ª integral indefinida, 1 punto por hacer bien la 2ª integral indefinida, 0'75 puntos por sustituir bien los límites de integración y concluir que la suma de integrales definidas vale 1.

### OPCIÓN B

**1.-** (2'5 puntos) : 1'5 puntos por el planteamiento ($A \cdot B = B \cdot A \Leftrightarrow x + y = 2x = 2y$ y $x^2 + 1 = 1 + xy = 1 + y^2$); 1 punto por la resolución ($A \cdot B = B \cdot A \Leftrightarrow x = y$).

**2.-** (2'5 puntos) : 1 punto por cualquier planteamiento correcto (fórmula de la distancia de un punto a un plano, ...); 1'25 puntos por obtener que $H$ es el conjunto de puntos $P = (x, y, z)$ que cumplen la ecuación $y - z = 0$ ó la ecuación $x = 1$; 0'25 puntos por explicitar que $H$ es la unión de dos planos.

**3.-** **(a)**: 1 punto. **(b)**: 0'75 puntos (vale $[a, b] = [-1, 1]$ porque $p(-1) = -1 < 0$ y $p(1) = 3 > 0$). **(c)**: 0'75 puntos (la función $h(x) = f(x) - g(x) = \ln(1 + x^2) - 1$ tiene ceros en el intervalo $\left[0, \sqrt{\mathrm{e}^2 - 1}\right]$ porque $h(0) = -1$ y $h\left(\sqrt{\mathrm{e}^2 - 1}\right) = 1$).

**4.-** **(a)**: 0'5 puntos. **(b)** (2 puntos) : 1 punto por plantear bien las integrales para obtener que el área es $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}(2x)\, \mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{sen}(2x)\, \mathrm{d}x$ ; 1 punto por resolverlas bien y obtener $A = 2$.