XXXV OLIMPIADA DE FÍSICA
FASE LOCAL – EXTREMADURA (23 de febrero de 2024)

APELLIDOS Y NOMBRE____

CENTRO DE ESTUDIOS____

PROBELMA 1. Existen varias hipótesis sobre la construcción de las pirámides de Egipto sin que ninguna de ellas cobre especial importancia, ya que no ha llegado hasta nuestros días documentación alguna al respecto. Una de las más aceptadas es que la construcción se llevaba a cabo mediante rampas de arena en zigzag que iban aumentando de altura a medida que crecía la pirámide. Los técnicos egipcios elevaban los bloques extraídos de canteras próximas al lugar de la pirámide en construcción, mediante trineos que eran arrastrados por dichas rampas.

Los protagonistas de nuestra historia son los miembros del equipo técnico del arquitecto *Hemiunu*, que erigió la "Gran Pirámide de Guiza" por orden del faraón *Keops* (Dinastía IV: reinado del 2584 a. C. al año 2558 a. C).

https://es.wikipedia.org/wiki/Gran_Pir%C3%A1mide_de_Guiza

El equipo de trabajadores de *Hemiunu* debía mover un trineo, inicialmente en reposo, con bloques de granito con una masa total *m,* por una de las rampas que formaba 20º con la horizontal. Para ello, utilizaron una cuerda unida al trineo y tiraron de ella con una fuerza constante de 300 N, formando un ángulo de 30º respecto a la superficie inclinada de la rampa. Sin embargo, no consiguieron mover el trineo y decidieron quitar un bloque de 10 kg y, tirando con la misma fuerza y ángulo anteriores, lograron iniciar el desplazamiento del trineo.
Se pide calcular:

a) Los valores mínimo y máximo de la masa total *m* que transporta el trineo. Razona los resultados.
b) Asumiendo los valores mínimo y máximo calculados en el apartado a), y teniendo en cuenta que hemos descargado 10 kg de peso, calcula el tiempo mínimo y el máximo que emplea el equipo de *Hemiunu* en desplazar el trineo por la rampa una distancia de 10 metros.

Datos: Los coeficientes de rozamiento del trineo con la rampa son 0,15 (estático) y 0,1 (cinético). Considera que la masa del trineo es despreciable frente a la de los bloques de granito que transporta.

En primer lugar, se calcula la masa mínima (m_{min}) que debe llevar el trineo para que no se mueva al tirar de él con una fuerza F =300 N formado un ángulo θ=30º con la rampa (la cual forma un ángulo β=20º con la horizontal).

Se aplica la segunda ley de Newton en la dirección del posible desplazamiento:

$(F*\cos\theta)-(m_{min}*g*\text{sen}\,\beta)-(\mu_e*N)=0 \quad (1)$

La fuerza normal (N) se obtiene al aplicar la segunda ley de Newton en la dirección perpendicular a la rampa:

$N+(F*\text{sen}\,\theta)-(m_{min}*g*\cos\beta)=0 \rightarrow N=(m_{min}*g*\cos\beta)-(F*\text{sen}\,\theta) \quad (2)$

Sustituyendo la ecuación (2) en (1), y despejando m_{min} se obtiene un valor de:

m_{min}= 59.6 kg

El problema explica que al retirar un bloque de 10 kg, y tirar con la misma fuerza y ángulo, el trineo se mueve. Por tanto, la masa inicial máxima que puede trasportar el trineo es de:

m_{max}=69.6 kg

Si el trineo inicialmente trasporta una masa superior a este valor máximo, al quitar 10 kg tendría una masa superior a 50.6 kg y, al tirar con la misma fuerza y ángulo, no se movería.

Por tanto, la solución del apartado A del problema es que el intervalo de valores posibles de la masa que puede transportar inicialmente el trineo es (59.6, 69.6 kg).

En el apartado B, se pide el tiempo mínimo y máximo que lleva mover el trineo una vez retirados los 10 kg. Por tanto, el intervalo de valores posible de la masa que puede llevar el trineo en movimiento es (49.6 kg, 59.6 kg).

Se aplica la segunda ley de Newton en la dirección del desplazamiento:

$(F*\cos\theta)-(m*g*\text{sen}\,\beta)-(\mu_c*N)=m*a \quad (3)$

La fuerza normal (N) es: $N=(m*g*\cos\beta)-(F*\text{sen}\,\theta) \quad (4)$

Sustituyendo la ecuación (4) en (3), se puede determinar la aceleración del trineo en función de su masa.

La ecuación de la cinemática del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado establece la relación entre distancia recorrida, velocidad inicial, tiempo y aceleración:

$s=v_0*t+0.5*a*t^2$

La velocidad inicial de trineo es nula, la distancia recorrida 10 m, por tanto, es posible obtener el tiempo en función de la aceleración, que a su vez depende de la masa.

Los resultados del apartado B son:

Para la masa de 49.6 kg, se obtiene un tiempo de 4 segundos.

Para la masa de 59.6 kg, se obtiene un tiempo de 7.7 segundos.

Por tanto, el intervalo de tiempo que llevará mover el trineo con su carga una vez retirados los 10 kg será (4 s, 7.7 s).

XXXV OLIMPIADA DE FÍSICA

FASE LOCAL – EXTREMADURA (23 de febrero de 2024)

APELLIDOS Y NOMBRE____
CENTRO DE ESTUDIOS____

PROBLEMA 2. El Rover de la NASA "Perseverance" fue lanzado mediante un cohete Atlas V el 30 de Julio de 2020 desde Cabo Cañaveral (Florida, EEUU). Su misión es la búsqueda de signos de vida pasada en Marte. Amartizó el 18 de Febrero de 2021 cerca del cráter Jezero. Hasta el pasado 3 de enero de 2024 ha recorrido 23,73 km sobre la superficie de Marte.

El viaje entre la Tierra y Marte estuvo compuesto por las siguientes cuatro fases: lanzamiento, crucero, aproximación y amartizaje (que incluía también la entrada y descenso). En la Fig. 1 podéis ver la órbita que siguió el Rover con los diferentes ajustes que se realizaron (denotados por TCM en la figura, Trajectory Correction Maneuvers, en inglés).

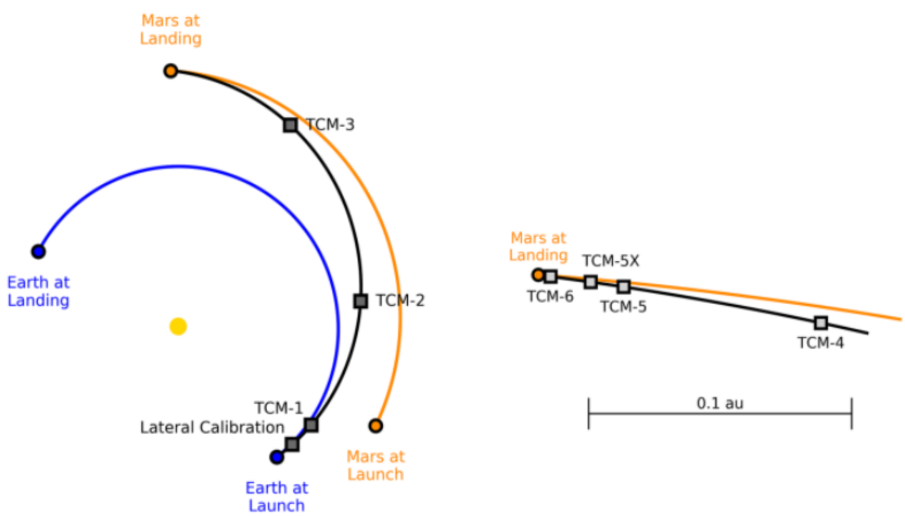

FIG. 1. Trayectoria seguida por el Rover "Perseverance". De M. Jesick et al., *Mars 2020 trajectory correction maneuver design*. Journal of Spacecraft and Rockets, 1(2022).

En este problema vamos a estudiar la fase de crucero y de una manera un poco simplificada. Lo primero que vamos a asumir es que las órbitas de la Tierra y de Marte alrededor del Sol van a ser circulares. En segundo lugar, supondremos que la trayectoria del Rover va a estar determinada únicamente por el Sol (es decir, despreciamos las interacciones gravitacionales de la Tierra y de Marte sobre el Rover). Además usaremos una órbita de transferencia de Hohmann (ver Material Adicional al final del enunciado de este problema) para pasar de la órbita terrestre a la órbita marciana (en una posición muy cercana a Marte, para poder implementar posteriormente las fases de aproximación y de amartizaje). Finalmente, consideraremos también que el comienzo de la órbita de transferencia de Hohmann del Rover estará muy cerca de la Tierra (siguiendo el Rover la órbita circular de la Tierra) y que la Tierra se ha desplazado muy poco sobre su órbita durante la fase de lanzamiento. En la Fig. 2 podéis ver el diseño de la versión simplificada de la fase de crucero.

(El examen continúa detrás)

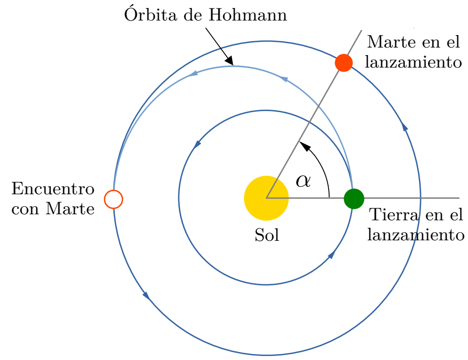

FIG. 2. Fase de crucero simplificada. Consideraremos que las posiciones en el momento del lanzamiento de la Tierra y Marte son muy cercanas a sus posiciones cuando el Rover comienza su fase de crucero.

Tenéis que calcular:

1. El tiempo que se necesitará para implementar la fase de crucero.
2. La posición inicial de Marte relativa a la Tierra, en el inicio de la fase de crucero, para que ocurra la interceptación de Marte por el Rover (ángulo α de la Fig. 2).

Datos: Distancia Tierra-Sol: $d_{\rm TS} = 1,5 \times 10^8$ km. Distancia Marte-Sol: $d_{\rm MS} = 2,3 \times 10^8$ km. Masa del Sol: $M_{\rm S} = 2 \times 10^{30}$ kg. Masa de Marte: $M_{\rm M} = 6,4 \times 10^{23}$ kg. $G = 6,7 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}.

Material Adicional: órbita de transferencia de Hohmann.

Una órbita de transferencia de Hohmann consiste en los siguiente pasos:

1. En un momento dado y en el punto P de la órbita circular original (órbita 1 de la Fig. 3) se encienden los motores del Rover, proporcionándole un impulso tangencial, lo que hace que el Rover abandone la órbita circular y pase a seguir una órbita elíptica con semieje mayor a (órbita 2 de la Fig. 3).
2. Cuando el Rover siguiendo la nueva órbita elíptica, llega al punto A (*opuesto* al punto P del apartado anterior, ver figura), se encienden de nuevo los motores proporcionando un nuevo impulso tangencial, lo que hace que la Rover pase a seguir una órbita circular a mayor distancia del Sol (órbita 3 de la Fig. 3).

Además las tres órbitas de la figura están en el mismo plano.

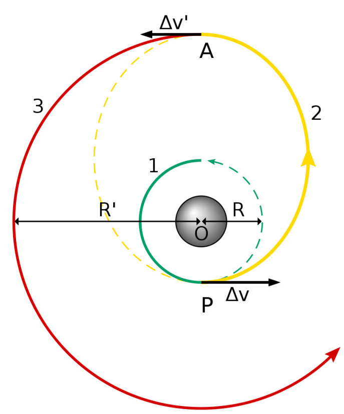

FIG. 3. Órbita de transferencia de Hohmann (`https://en.wikipedia.org/wiki/Hohmann_transfer_orbit#/media/File:Hohmann_transfer`
modificada).

SOLUCIÓN.

1. La fase de crucero se implementa (ver Material Adicional) sobre la mitad de la elipse que corresponde a la órbita de transferencia de Hohmann (de su perihelio a su afelio). Por lo tanto, el tiempo de la fase de crucero (t_c) es igual al semiperiodo de la órbita elíptica sobre la cuál hemos definido la órbita de transferencia de Hohmann. El semieje mayor de esta órbita elíptica verifica que $2a = d_{\mathrm{TS}} + d_{\mathrm{MS}}$ (Fig. 2) y usando la tercera ley de Kepler podemos calcular el periodo T de esta órbita elíptica:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a^3 = GM_{\mathrm{S}} \, ,$$

   donde hemos despreciado la masa del Rover frente a la del Sol. Por lo tanto el tiempo de la fase de crucero es:

$$t_c = \frac{T}{2} \simeq 2,25 \times 10^7 \text{ s} \simeq 260 \text{ días} \, .$$

2. Para calcular el ángulo α de la Fig. 2, tenemos que conocer la frecuencia angular del movimiento circular de Marte alrededor del Sol, ω_{Marte}, y que al ser una órbita circular se debe de verificar:

$$\pi = \alpha + \omega_{\mathrm{Marte}} t_c \, .$$

   ω_{Marte} la calcularemos usando la tercera ley de Kepler aplicada a la órbita circular de Marte:

$$\omega_{\mathrm{Marte}}^2 d_{\mathrm{MS}}^3 = GM_{\mathrm{S}} \, ,$$

   donde hemos despreciado la masa de Marte frente a la del Sol. Finalmente obtenemos

$$\alpha \simeq 44,7^\circ \, .$$

XXXV OLIMPIADA DE FÍSICA
FASE LOCAL – EXTREMADURA (23 de febrero de 2024)

APELLIDOS Y NOMBRE____

CENTRO DE ESTUDIOS____

PROBLEMA 3. En la próxima entrega de los *X-Men* (sentimos haceros espóiler), una nave alienígena amenaza la vida de los mutantes de *Genosha*, por lo que el *Profesor X* encarga a *Tormenta* su destrucción.

Antes de aventurarse a esta misión, *Tormenta* estudia la nave alienígena encontrando que está construida con un material metálico, similar al aluminio, que es de forma esférica, con un radio de 20 m, y que tiene una carga de 6 C, almacenada de manera uniforme en su superficie. El centro de la nave se encuentra a una distancia de 200 m desde el punto donde está *Tormenta*.

Para llegar a la superficie de la nave, *Tormenta* se carga con 1 mC y con ayuda de *Coloso* es propulsada hacia la superficie de la nave con una velocidad de 100 m/s.

Debido a un error de cálculo, *Tormenta* no consigue su objetivo en un primer intento, quedándose a cierta distancia de la superficie de la nave.

a) Explica razonadamente por qué y calcula dicha distancia.
b) ¿Cuál debería ser la mínima velocidad de propulsión de *Tormenta* para conseguir su objetivo?
c) ¿Qué otras formas tiene *Tormenta* para llegar a su objetivo sin modificar las condiciones de la nave ni la posición de lanzamiento y manteniendo la velocidad inicial de 100 m/s?

NOTAS:

1. Toma la masa de *Tormenta* igual a 60 kg.
2. Desprecia en todo momento la interacción gravitatoria.
3. Desprecia el tamaño de *Tormenta* frente a las dimensiones de la nave.
4. Constante de *Coulomb* $K = 9 \cdot 10^9$ Nm^2C^{-2}.

SOLUCIÓN

a) Si despreciamos los efectos gravitatorios, la única fuerza a la que se verá sometida *Tormenta* es la electrostática, que será de **carácter repulsivo**, debido a que las cargas de la nave y de *Tormenta* tienen el mismo signo. Eso significa que ***Tormenta* sufrirá una desaceleración** que irá disminuyendo su velocidad inicial. Habrá que calcular qué distancia es capaz de recorrer *Tormenta*, antes de pararse, y comprobar si es suficiente para llegar a la superficie de la nave. Siendo la fuerza electrostática conservativa, podemos resolver el problema utilizando el **principio de conservación de la energía**. En el punto de propulsión (llamémosle A), *Tormenta* tiene una energía mecánica que será la suma de la energía cinética debida a la velocidad de lanzamiento y de la energía potencial eléctrica debida al campo eléctrico creado por la nave. Si llamamos B al punto al que llega *Tormenta*, **la máxima distancia que recorrerá será aquella a la que llegue con velocidad cero**, por lo que, en B, solo habrá energía potencial eléctrica. Es decir:

$$E_c(A) + E_p(A) = E_p(B) \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + K\frac{Qq}{r_A} = K\frac{Qq}{r_B}$$

donde v_0, m y q son la velocidad inicial, la masa y la carga de *Tormenta*, respectivamente, y Q es la carga de la nave. Despejando r_B :

$$r_B = \frac{KQq}{\frac{mv_0^2}{2} + \frac{KQq}{r_A}} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{\frac{60 \cdot 100^2}{2} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{200}} \text{ (m)} \cong 94{,}74 \text{ m}$$

Como el radio de la esfera es 20 m, ***Tormenta* se quedará a 74,74 m de la superficie de la nave**.

b) Para calcular la mínima velocidad necesaria para que *Tormenta* llegue a la superficie de la nave, tendremos que hacer un **tratamiento similar al anterior**. Llamando *S* al punto de la superficie de la nave, tendremos:

$$E_c(A) + E_p(A) = E_p(S) \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + K\frac{Qq}{r_A} = K\frac{Qq}{r_S}$$

donde *v* es la velocidad que buscamos y $r_s = 20$ m. Despejando *v*:

$$v = \left[\frac{2KQq}{m}\left(\frac{1}{r_S} - \frac{1}{r_A}\right)\right]^{1/2} = \left[\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{60}\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{200}\right)\right]^{1/2} \text{ m/s} \cong 284{,}6 \text{ m/s}$$

c) Habría dos alternativas para conseguir el objetivo.
La primera sería **adquirir carga negativa**, de forma que la fuerza electrostática entre la nave y *Tormenta* tendría carácter atractivo, lo que aceleraría el movimiento de *Tormenta*, permitiéndole llegar a su superficie; eso sí, tendría que hacer uso de sus poderes extraordinarios ya que la velocidad de llegada no sería cero y podría no soportar el choque.
La otra posibilidad, manteniendo la carga positiva, es que **modificara su valor** para conseguir recorrer los 180 metros que la separan de la superficie, antes de pararse. Obviamente, tendría

que ir a un valor de q < 1 mC, para minimizar los efectos de la fuerza repulsiva. Para ello, teniendo en cuenta que la condición de alcanzar la superficie es $r_S = 20$ m:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + K\frac{Qq}{r_A} = K\frac{Qq}{r_S} \to KQq\left(\frac{1}{r_S} - \frac{1}{r_A}\right) = \frac{mv_0^2}{2}$$

Despejando q, queda un valor máximo de:

$$q = \frac{mv_0^2 r_A r_S}{2KQ(r_A - r_S)} \to q = \frac{60 \cdot 100^2 \cdot 200 \cdot 20}{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot (200 - 20)}\text{C} \cong 1{,}23 \cdot 10^{-4}\text{C} = 0{,}123\text{mC}$$